解答例

STEP II 1996、第 7 問

純粋数学 • 座標幾何における軌跡

STEP II 1996、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/96-s2-q7

鍵となる考え方

正方形を両方の座標軸に関して対称になるように座標の中に置く。すると各距離は 1 次式の絶対値（modulus）となり、2 つの積 pr と qs はそれぞれ $|y^2 - a^2|$ と $|x^2 - a^2|$ になる。$|U| = |V|$ という形の方程式は $U = V$ または $U = -V$ に分かれる。一方の場合からは 2 本の直線が、もう一方の場合からは円が得られる。

解答

正方形の 1 辺の長さを $2a$（ただし $a > 0$）とし、中心を原点に、辺を座標軸に平行にとる：

$$A = (-a, -a), \quad B = (a, -a), \quad C = (a, a), \quad D = (-a, a).$$

このとき AB は直線 $y = -a$ 上に、BC は $x = a$ 上に、CD は $y = a$ 上に、DA は $x = -a$ 上にある。$P = (x, y)$ から水平な直線 $y = c$ までの距離（垂線の長さ）は $|y - c|$ であり、鉛直な直線 $x = c$ までの距離は $|x - c|$ である。よって

$$p = |y + a|, \qquad q = |x - a|, \qquad r = |y - a|, \qquad s = |x + a|.$$

これらの式は、正方形の内部か外部かによらず、平面上のすべての P について成り立つ。距離を非負にしているのは絶対値であるから、これを外してはならない。

2 つずつ掛け合わせ、$|u|\,|v| = |uv|$ を用いると

$$pr = |(y + a)(y - a)| = |y^2 - a^2|, \qquad qs = |(x - a)(x + a)| = |x^2 - a^2|.$$

考えてみよう 多くの領域に場合分けすることなく、$|y^2 - a^2| = |x^2 - a^2|$ から絶対値を外すにはどうすればよいか？

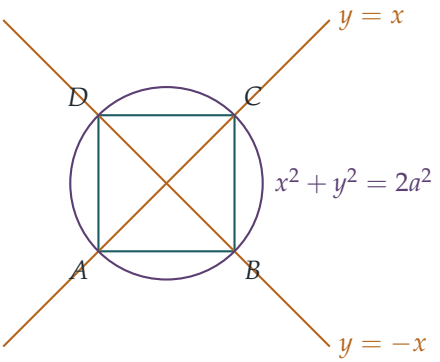
実数に対して、$|U| = |V|$ が成り立つための必要十分条件（if and only if）は $U = V$ または $U = -V$ である。両辺は非負であり、$|U| = |V| \iff U^2 = V^2 \iff (U - V)(U + V) = 0$ となるからである。用いるのは同値変形だけなので、必要条件と十分条件が同時に得られる。したがって $pr = qs$ が成り立つための必要十分条件は

$$y^2 - a^2 = x^2 - a^2 \qquad \text{または} \qquad y^2 - a^2 = -(x^2 - a^2).$$

第 1 の場合。 $y^2 = x^2$、すなわち $(y - x)(y + x) = 0$ であるから、$y = x$ または $y = -x$ である。これらは正方形の中心を通り、対角線 AC と BD を含む 2 本の（無限に延びた）直線である。

第 2 の場合。 $x^2 + y^2 = 2a^2$。これは正方形の中心を中心とし、対角線の半分である $\sqrt{2}\,a$ を半径とする円である。よってこれは正方形の外接円（circumcircle）であり、A、B、C、D を通る。

以上より、$pr = qs$ ならば P は 2 本の対角線の直線 AC、BD（両方向に限りなく延長したもの）のいずれか、または $ABCD$ の外接円の上にある。逆に、上の各段階はすべて逆にたどることができる。P がどちらかの直線上にあれば $x^2 = y^2$ であるから $|y^2 - a^2| = |x^2 - a^2|$ となる。P が円上にあれば $y^2 - a^2 = a^2 - x^2$ となり、やはり $|y^2 - a^2| = |x^2 - a^2|$ が得られる。いずれにしても $pr = qs$ であるから、2 本の直線と円の上のすべての点が P の位置としてありうる。以上で証明が完了する。



考えてみよう 正方形の外部の点は本当に許されるのか。また、直線は頂点で途切れるのか？

問題は平面上の任意の点を許しており、ここで用いた距離の式はどこでも成り立つ。よって軌跡（locus）は各直線の全体であって、線分としての対角線だけではない。たとえば $P = (3a, 3a)$ では $p = 4a$、$r = 2a$、$q = 2a$、$s = 4a$ であり、$pr = qs = 8a^2$ となる。

検算

- 中心 $(0,0)$ は両方の直線上にある：$p=q=r=s=a$ であるから $pr=qs$。
- 円上の点のうち、AB の中点の真下にある点 $(0,-\sqrt{2}\,a)$ をとる。このとき $p=(\sqrt{2}-1)a$、$r=(\sqrt{2}+1)a$ より $pr=a^2$ であり、$q=s=a$ より $qs=a^2$ である。
- 軌跡上にない点、たとえば $(\frac{1}{2}a,0)$ では $pr=a^2$ だが $qs=\frac{3}{4}a^2$ となり、条件を満たさない。
- 数値的に（$a=1.7$ として）、3 つの曲線上の 30 000 個のランダムな点で $pr=qs$ が 10^{-9} の精度で成り立った。$[-5,5]^2$ 上の 600×600 の格子で $pr-qs$ の符号変化を調べたところ、2 本の直線と円から離れたところには零点は見つからなかった。

よくある間違い

- 絶対値を外して $pr=a^2-y^2$、$qs=a^2-x^2$ と書いてしまう。これは正方形の内部でしか成り立たず、円が失われて $y=\pm x$ だけが得られてしまう。
- P がこれらの曲線上にあることが必要であることしか証明しない。問題は逆も求めているので、直線と円の上のすべての点が条件を満たす理由を述べること。
- 直線を対角線の**線分** AC と BD として記述してしまう。これらは直線全体である。

STEP のその先へ

この軌跡は多項式 $(y^2-a^2)^2-(x^2-a^2)^2$ の零点集合であり、この多項式は $(y-x)(y+x)(x^2+y^2-2a^2)$ と因数分解される。このように、多項式の方程式で与えられた曲線がより単純な部分に分解されるものは、可約な**代数曲線**（algebraic curve）の最初の例である。図形の対称性に合わせて座標をとる習慣こそが、こうした因数分解を見えるようにしてくれる。この種の幾何をさらに学ぶには Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（上級数学問題集）を、曲線の代数については Reid, *Undergraduate Algebraic Geometry*（学部生のための代数幾何）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。