解答例

STEP II 1996、第 6 問

純粋数学 • 約数の個数

> **STEP II 1996、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q6

鍵となる考え方

N のすべての約数（factor）は、各素数 p_i について、それを何個とるか（0 個から m_i 個まで）を独立に選ぶことで作られる。その選び方を数えればすべての約数を数えたことになり、あとは 1 と N を除けばよい。そうすると、二つの探索問題はどちらも指数（exponent）についての問題になる。すなわち、どのような指数のパターンが正しい個数を与えるか、そして N をできるだけ小さくするにはそれらの指数をどの素数に割り当てればよいか、という問題である。

解答

最初の例

12 の約数は $1, 2, 3, 4, 6, 12$ である。1 と 12 を除くと $2, 3, 4, 6$ が残るので、真の約数（proper factor）は 4 個である。16 の約数は $1, 2, 4, 8, 16$ である。1 と 16 を除くと $2, 4, 8$ が残るので、真の約数は 3 個である。

一般の個数

M が N を割り切るとする。このとき M の素因数はすべて N の素因数であり、しかも M の中に N の中より多く現れることはない。よって

$$M = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}, \qquad 0 \le a_i \le m_i.$$

逆に、このような積はどれも N を割り切る。素因数分解の一意性（uniqueness of prime factorisation）により、$(a_1, \ldots, a_r)$ の選び方が異なれば異なる整数 M が得られ

る。したがって N の約数はこれらの選び方とちょうど一対一に対応する。各 a_i について m_i+1 通りの選び方があり、それらは独立に選べるので、N は全部で

$$d(N) = (m_1+1)(m_2+1)\cdots(m_r+1)$$

個の約数をもつ。$r \geq 1$ より $N > 1$ であるから、1 と N は**異なる**二つの約数である。これらを除くと、真の約数の個数は

$$(m_1+1)(m_2+1)\cdots(m_r+1) - 2.$$

確認：$12 = 2^2 \cdot 3$ からは $3\cdot 2 - 2 = 4$ が得られ、$16 = 2^4$ からは $5 - 2 = 3$ が得られる。

N を小さくするための原理

どちらの小問でも、指数を固定したうえで、それが許す最小の N を求める。次の二つの観察で決着がつく。

- 最も小さい素数を使う。ある素数 q が使われていて、それより小さい素数 p が使われていないとき、q を p に置き換えてもすべての指数は変わらないので個数も変わらず、しかも N は小さくなる。よって素数は $2, 3, 5, \ldots$ を隙間なく使うべきである。
- 最も大きい指数を最も小さい素数に載せる。$p < q$ で、p の指数が a、q の指数が b であり、$a < b$ であるとする。二つの指数を入れ替えると N は $p^{b-a}/q^{b-a} < 1$ 倍になり、個数は変わらない。

よって、指数 $e_1 \geq e_2 \geq \cdots \geq e_r$ に対して最小の N は $2^{e_1}3^{e_2}5^{e_3}\cdots$ である。

小問 (i)

真の約数がちょうど 12 個必要なので、$d(N) = 14$ である。各因数 m_i+1 は 2 以上であり、$14 = 2\cdot 7$ で 7 は素数である。よって 14 をそれぞれ 2 以上の因数の積として表す方法は次の二通りしかない。

- 14 そのもの：$N = p^{13}$ であり、最小となるのは $2^{13} = 8192$ である。
- 7×2：$N = p^6 q$ であり、最小となるのは $2^6 \cdot 3 = 192$ である。

したがって、真の約数をちょうど 12 個もつ最小の正の整数は

$$\boxed{192 = 2^6 \cdot 3}.$$

その約数は $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 64, 96, 192$ であり、14 個ある。

小問 (ii)

今度は $d(N) \geq 14$ が必要である。$d(N)$ はもはや固定されていないので、相異なる素数の個数 r で場合分けする。指数を降順に $e_1 \geq e_2 \geq \cdots$ と書く。

> **考えてみよう** なぜ小問 (i) をそのまま使って $d(N) = 14$ だけを調べるのではいけないのだろうか？

約数が**多い**からといって N が大きくなければならないわけではないからである。指数をいくつかの小さい素数に分散させると、安く多くの約数が得られる。たとえば $2^3 \cdot 3 \cdot 5$ は $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ 個の約数をもち、192 よりずっと小さい。よって $d(N) \geq 14$ となるすべての値を調べなければならない。

- $r \geq 4$：このとき $N \geq 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$ である。
- $r = 3$：このとき $d(N) = (e_1+1)(e_2+1)(e_3+1) \geq 14$ である。$e_2 = e_3 = 1$ ならば $4(e_1+1) \geq 14$ が必要なので $e_1 \geq 3$ となり、$N \geq 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$ である。そうでなければ $e_2 \geq 2$ なので $e_1 \geq 2$ でもあり、$N \geq 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$ である。
- $r = 2$：このとき $e_1 \geq e_2$ のもとで $(e_1+1)(e_2+1) \geq 14$ である。$e_2 = 1$ ならば $e_1 \geq 6$ であり、$N \geq 2^6 \cdot 3 = 192$ である。$e_2 = 2$ ならば $3(e_1+1) \geq 14$ より $e_1 \geq 4$ となるので、$N \geq 2^4 \cdot 3^2 = 144$ である。$e_2 \geq 3$ ならば $e_1 \geq 3$ であり、$N \geq 2^3 \cdot 3^3 = 216$ である。
- $r = 1$：$e_1 + 1 \geq 14$ なので $N \geq 2^{13} = 8192$ である。

どの場合も $N \geq 120$ となり、しかも $N = 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ は実際に条件を満たす。真の約数を $4 \cdot 2 \cdot 2 - 2 = 14$ 個もつからである。よって、真の約数を 12 個以上もつ最小の正の整数は

$$\boxed{120},$$

であり、実際には真の約数を 14 個もつ。

検算

2 から 9000 までのすべての N について真の約数を総当たりで数えると、公式 $d(N) - 2$ と一致する。またこれにより、真の約数をちょうど 12 個もつ最初の N が 192 であること、および 12 個以上もつ最初のものが 120 であること（14 個もつ）も確かめられる。手早く手計算で確かめるなら、120 のすぐ下にある約数の多い数、すなわち $60, 72, 84, 90, 96$ および 108 は、いずれも約数を 12 個もつので、真の約数は 10 個しかない。

よくある間違い

- 14 ではなく $d(N) = 12$ とおいてしまう。1 と N は除かれることを忘れないこと。
- 小問 (ii) でも 192 と答えてしまう。真の約数を 12 個以上もつ最小の N が、ちょうど 12 個もつとは限らない。
- 大きい指数を大きい素数に載せてしまう。$2 \cdot 3^6$ は $2^6 \cdot 3$ と同じ個数の約数をもつが、はるかに大きい。

STEP のその先へ

約数関数（divisor function）$d(N)$ は**乗法的**（multiplicative）である。すなわち、a と b が互いに素であるときはつねに $d(ab) = d(a)d(b)$ が成り立つ。積の公式が表しているのはまさにこのことである。自分より小さいどの数よりも多くの約数をもつ数は**高度合成数**（highly composite number）と呼ばれ、ラマヌジャン（Ramanujan）が深く研究した。120 はその一つであり、ここで用いた指数の並べ方の議論は彼の解析の出発点である。ダベンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）は、約数関数と素因数分解の一意性への素晴らしい入門書である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。