解答例

STEP II 1996、第 5 問

純粋数学 • 1 の冪根

> **STEP II 1996、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q5

鍵となる考え方

この 4 次式（quartic）は**相反的**（palindromic）である。すなわち、係数を前から読んでも後ろから読んでも同じになる。z^2 で割ると項は z^2+z^{-2} と $z+z^{-1}$ にまとまり、どちらも $u=z+z^{-1}$ を用いて表せるので、z の 4 次方程式は u の 2 次方程式（quadratic）に帰着する。後半では、この 4 次式が z^5-1 から $z-1$ をくくり出したときに残る因数であることに気づく。したがってその根は 1 の 5 乗根（fifth roots of unity）であり、同じ 4 つの数の 2 通りの表し方を比べることで、三角関数（trigonometric functions）の正確な値が得られる。

解答

u の値

$z=0$ は $(*)$ を満たさないので、z^2 で割ってよい：

$$z^2+z+1+z^{-1}+z^{-2}=0.$$

ここで $u^2=(z+z^{-1})^2=z^2+2+z^{-2}$ であるから、$z^2+z^{-2}=u^2-2$ である。方程式は

$$u^2-2+u+1=0, \qquad \text{すなわち} \qquad u^2+u-1=0,$$

となるので、

$$u=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{または} \quad u=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

z の値

$z+z^{-1}=u$ より $z^2-uz+1=0$ であるから、

$$z=\frac{u\pm\sqrt{u^2-4}}{2}.$$

$u^2=1-u$ を用いると判別式（discriminant）は $u^2-4=-3-u$ であり、これは u のどちらの値に対しても負である（いずれの場合も $|u|<2$ であるため）。よって根は実数でない：

$$z=\frac{u\pm i\sqrt{3+u}}{2}.$$

$u=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ のときは $3+u=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$、$u=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ のときは $3+u=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ である。$\sqrt{\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{10\pm2\sqrt{5}}$ と書き直すと、$(*)$ の4つの解は

$$z=\frac{-1+\sqrt{5}\pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\qquad\text{および}\qquad z=\frac{-1-\sqrt{5}\pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

である。u の各値から z の値が2つずつ得られ（z と z^{-1} の組で、ここでは互いに共役複素数（complex conjugates）である）、4次方程式の根はちょうど4つなので、これですべてである。

$z^5=1$ との関係

展開すると、中間の項が次々に打ち消し合う（telescope）ので

$$(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)=z^5-1,$$

が成り立つ。よって z が $(*)$ を満たすならば、第2の因数が0となり、$z^5-1=0$ である。

$z^5=1$ の解は $k=0,1,2,3,4$ に対する $z=\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5}$ である。$k=0$ は $z=1$ を与えるが、これは $(*)$ を**満たさない**（左辺は5となる）。残りの4つは相異なり、いずれも $(*)$ を満たす。なぜなら、それらに対しては $z-1\neq0$ であるから、因数 $z^4+z^3+z^2+z+1$ が0でなければならないからである。したがって $(*)$ の解は

$$z=\cos\theta+i\sin\theta,\qquad r=1,\quad \theta=\pm\frac{2\pi}{5},\pm\frac{4\pi}{5}.$$

である。

結論を導く

これで同じ4つの数について2通りの表し方が得られた。あとはそれらを対応させればよい。

考えてみよう 4 つの根号を含む式（surd）のうち、どれが $\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$ であろうか？

符号に注目する。$0<\frac{2\pi}{5}<\frac{\pi}{2}$ であるから、数 $\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$ の実部（real part）と虚部（imaginary part）はともに正である。根号を含む式の実部は $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}>0$ と $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}<0$ であるから、第 1 象限（first quadrant）にあるものはちょうど 1 つである：

$$\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}+i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

（$(0,\pi)$ にあるもう 1 つの角 $\frac{4\pi}{5}$ は余弦が負なので、虚部が正であるもう一方の根に対応する。）実部と虚部を比較して、

$$\sin\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\qquad\text{および}\qquad\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4},$$

が示された。副産物として、$\cos\frac{4\pi}{5}=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ および $\sin\frac{4\pi}{5}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ も得られる。

検算

- $\cos\frac{2\pi}{5}=\cos 72^\circ\approx 0.30902$ であり、$\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\approx 0.30902$ である。また $\sin 72^\circ\approx 0.95106$ であり、$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\approx 0.95106$ である。
- 4 つの根の和は -1（z^3 の係数の符号を変えたもの）になるはずである。実際、実部の和は $\frac{2(-1+\sqrt{5})+2(-1-\sqrt{5})}{4}=-1$ である。同じことだが、u の 2 つの値の和は -1 である。
- 各根の絶対値（modulus）は 1 になるはずである。例えば $\frac{(-1+\sqrt{5})^2+(10+2\sqrt{5})}{16}=\frac{16}{16}=1$ である。

4 つの根号を含む式がすべて $(*)$ と $z^5=1$ を満たし、$e^{\pm 2\pi i/5}$、$e^{\pm 4\pi i/5}$ と一致することを数値的に確認した。

よくある間違い

- $z=1$ を除外し忘れること。$z=1$ は $z^5=1$ を満たすが $(*)$ は満たさないので、$(*)$ の根は 5 つではなく 4 つである。
- 根拠なしに根号を含む式と角を対応させること。どの根が $\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$ であるかを確定させるのは、実部の符号である。
- $z^2+z^{-2}=u^2$ と書いて -2 を落とすこと。

STEP のその先へ

置き換え $u = z + z^{-1}$ によって、任意の相反多項式の次数は半分になる。$\cos\frac{2\pi}{5}$ が 2 次方程式を解くだけで求まるのは偶然ではない。ガウス（Gauss）は、$\cos\frac{2\pi}{n}$ が平方根だけを用いて表せるのは、正 n 角形が定規とコンパス（ruler and compass）で作図できるときであり、かつそのときに限ることを示した。この問題は正五角形の作図の背後にある代数なのである。その全貌はガロア理論（Galois theory）であり、大学 2 年次の代数の講義で学ぶ。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、1 の累乗根について美しい幾何学的な見方を与えてくれる。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。