解答例

STEP II 1996、第 4 問

純粋数学 ・ 置換積分

> **STEP II 1996、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q4

鍵となる考え方

平方根 $\sqrt{1+x}$ と $\sqrt{1-x}$ は、$x=\cos t$ と置くことを強く示唆している。半角の公式（half-angle formulae）によって $1\pm\cos t$ が完全平方になるからである。根号が消えれば、和 $\cos\theta+\sin\theta$ は一つの余弦にまとまり、分母全体は $1+\cos$(何か) の形になって、これもまた完全平方になる。最後の置換は積分区間の中心をずらして分子を $\cos 4u$ にするためのものであり、まさにそのために最初に恒等式を証明しておくのである。

解答

恒等式

$c=\cos u$ として、$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ を 2 回用いると、

$$\begin{aligned}\cos 4u &= 2\cos^2 2u - 1 = 2\left(2c^2-1\right)^2 - 1\\ &= 2\left(4c^4-4c^2+1\right) - 1 = 8\cos^4 u - 8\cos^2 u + 1,\end{aligned}$$

となり、示された。

1 つ目の置換

$x=\cos t$ と置換（substitution）すると、$\mathrm{d}x = -\sin t\,\mathrm{d}t$ である。x が -1 から 1 まで動くとき、t は π から 0 まで減少する。負号によって積分の上端と下端が元に戻り、

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{1+\cos t}+\sqrt{1-\cos t}+2}\,\mathrm{d}t.$$

を得る。ここで $1+\cos t = 2\cos^2\frac{t}{2}$、$1-\cos t = 2\sin^2\frac{t}{2}$ である。

考えてみよう $\sqrt{2\cos^2\frac{t}{2}}$ は本当に $\sqrt{2}\cos\frac{t}{2}$ であって、$\sqrt{2}\left|\cos\frac{t}{2}\right|$ ではないのだろうか？

一般には絶対値（modulus）が付くが、ここでは $0 \le t \le \pi$ なので $0 \le \frac{t}{2} \le \frac{\pi}{2}$ であり、$\cos\frac{t}{2}$ と $\sin\frac{t}{2}$ はともに非負である。$t \in [0, \pi]$ という選び方が（たとえば $[-\pi, 0]$ ではなく）重要なのは、まさにこのためである。よって

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\cos t}+\sqrt{1-\cos t} &= \sqrt{2}\left(\cos\tfrac{t}{2}+\sin\tfrac{t}{2}\right)\\ &= 2\left(\cos\tfrac{t}{2}\cos\tfrac{\pi}{4}+\sin\tfrac{t}{2}\sin\tfrac{\pi}{4}\right) = 2\cos\left(\tfrac{t}{2}-\tfrac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

$v = \frac{t}{4} - \frac{\pi}{8}$ と置くと $\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4} = 2v$ であるから、分母は

$$2 + 2\cos 2v = 2\left(1+\cos 2v\right) = 4\cos^2 v = 4\cos^2\left(\tfrac{t}{4}-\tfrac{\pi}{8}\right),$$

となり、したがって

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{4\cos^2\left(\frac{t}{4}-\frac{\pi}{8}\right)}\,\mathrm{d}t,$$

となって、示された。

2 つ目の置換

$u = \frac{t}{4} - \frac{\pi}{8}$ と置くと、$t = 4u + \frac{\pi}{2}$、$\mathrm{d}t = 4\,\mathrm{d}u$ である。積分区間の端 $t = 0$ と $t = \pi$ はそれぞれ $u = -\frac{\pi}{8}$ と $u = \frac{\pi}{8}$ になる。分子は

$$\sin t = \sin\left(4u + \tfrac{\pi}{2}\right) = \cos 4u,$$

であり、ここで最初の恒等式が効いてくる。よって

$$\begin{aligned}I &= \int_{-\pi/8}^{\pi/8} \frac{\cos 4u}{4\cos^2 u}\cdot 4\,\mathrm{d}u = \int_{-\pi/8}^{\pi/8} \frac{8\cos^4 u - 8\cos^2 u + 1}{\cos^2 u}\,\mathrm{d}u\\ &= \int_{-\pi/8}^{\pi/8} \left(8\cos^2 u - 8 + \sec^2 u\right)\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

区間上で $\cos u \ge \cos\frac{\pi}{8} > 0$ であるから、$\cos^2 u$ で割ってよい。$8\cos^2 u = 4 + 4\cos 2u$ を用いると、被積分関数（integrand）は $4\cos 2u - 4 + \sec^2 u$ となるので、

$$I = \Big[\,2\sin 2u - 4u + \tan u\,\Big]_{-\pi/8}^{\pi/8}.$$

括弧内は u の奇関数（odd function）であるから、その値は $\frac{\pi}{8}$ での値の 2 倍である：

$$\begin{aligned}I &= 2\left(2\sin\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\pi}{2} + \tan\tfrac{\pi}{8}\right) = 2\left(\sqrt{2} - \tfrac{\pi}{2} + \sqrt{2} - 1\right)\\ &= 4\sqrt{2} - \pi - 2,\end{aligned}$$

ここで $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ と、与えられた $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$ を用いた。これが求める結果である。

検算

- 数値的には $4\sqrt{2}-\pi-2\approx 0.51526$ である。シンプソンの公式（Simpson's rule）を x による元の積分、t による積分、u による積分のそれぞれに適用すると、いずれも 0.515262 を与える。
- 大きさの確認：$[-1,1]$ 上で和 $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$ は $\sqrt{2}$（$x=\pm 1$ のとき）と 2（$x=0$ のとき）の間にあるので、被積分関数は $\frac{1}{4}$ と $\frac{1}{2+\sqrt{2}}\approx 0.293$ の間にある。よって $0.5\leq I\leq 0.586$ であり、0.515 はこれに合っている。
- $t=0$ において、分母 $4\cos^2(-\frac{\pi}{8})$ は $\sqrt{2}+0+2$ に等しいはずである。実際、$4\cos^2\frac{\pi}{8}=2(1+\cos\frac{\pi}{4})=2+\sqrt{2}$ である。

よくある間違い

- $\mathrm{d}x=-\sin t\,\mathrm{d}t$ の負号を忘れる、あるいは積分の上端と下端を入れ替えるのを忘れて、$-I$ を得てしまう。
- $[0,\pi]$ 上で $\cos\frac{t}{2}\geq 0$ であることに触れずに $\sqrt{1+\cos t}=\sqrt{2}\cos\frac{t}{2}$ と書いてしまう。
- $\mathrm{d}t=4\,\mathrm{d}u$ の因数 4 を落としてしまう。この 4 は分母の 4 とちょうど打ち消し合う。

STEP のその先へ

$x=\cos t$ のように平方根を「有理化」する置換は、ある一般的な事実の特別な場合である。すなわち、x と $\sqrt{1-x^2}$（あるいは同様の 2 次の無理式）の有理関数（rational function）である被積分関数は、三角関数による置換や $t=\tan\frac{\theta}{2}$ の置換によって必ず有理関数に変換でき、初等関数の範囲で積分できる。大学ではこれを体系的に扱った形に出会い、またその限界にも出会う。3 次や 4 次の無理式になると楕円積分（elliptic integral）が現れ、これは初等関数では表せない。この種の問題をさらに多く解きたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策の問題集）に取り組むとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。