解答例

STEP II 1996、第 3 問

純粋数学 • 帰納法によるフィボナッチ数の恒等式

> **STEP II 1996、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q3

鍵となる考え方

ここで示すことはすべて漸化式（recurrence relation）から導かれるので、数学的帰納法（induction）を用いるのが自然である。積 $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$ については、隣り合う値どうしを比べるのがこつである。漸化式を一度使うと、各値は直前の値の -1 倍になる。加法公式（addition formula）については、k に関する帰納法を用い、その際に仮定が**すべての** n について同時に成り立つものとしておくのが巧みなやり方である。こうしておけば、n の代わりに $n+1$ として仮定を適用できる。

解答

最初のいくつかの値

$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ を $n = 1, 2, 3$ として用いると、

$$F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1, \qquad F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2, \qquad F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3,$$

となり、求める結果を得る。さらに続けると、

$$F_5 = 3 + 2 = 5, \qquad F_6 = 5 + 3 = 8, \qquad F_7 = 8 + 5 = 13.$$

積 $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$

$n \geq 1$ に対して $C_n = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$ とおく。値の表から次を得る。

n	1	2	3	4	5	6
$F_{n+1}F_{n-1}$	$1\cdot 0$	$2\cdot 1$	$3\cdot 1$	$5\cdot 2$	$8\cdot 3$	$13\cdot 5$
F_n^2	1	1	4	9	25	64
C_n	-1	1	-1	1	-1	1

値の符号が交互に変わるので、次のように予想する。

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \qquad \text{すべての} n \geq 1.$$

考えてみよう 漸化式だけを用いて、C_n から C_{n+1} へ移るにはどうすればよいか。

C_{n+1} の中で添字の大きいほうを展開する。$n \geq 1$ のとき、

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 \\ &= (F_{n+1} + F_n)F_n - F_{n+1}^2 && (\text{漸化式による} F_{n+2}) \\ &= F_n^2 - F_{n+1}(F_{n+1} - F_n) \\ &= F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} && (\text{ここで} F_{n+1} - F_n = F_{n-1}、\text{ただし} n \geq 1) \\ &= -C_n. \end{aligned}$$

これで帰納法はただちに完成する。基底段階（base case）は $C_1 = F_2F_0 - F_1^2 = 0 - 1 = -1 = (-1)^1$ である。ある $n \geq 1$ について $C_n = (-1)^n$ ならば、$C_{n+1} = -C_n = (-1)^{n+1}$ となる。したがって、帰納法により

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \qquad \text{すべての} n \geq 1.$$

加法公式

各正の整数 k に対し、$P(k)$ を次の命題とする。

$$F_{n+k} = F_kF_{n+1} + F_{k-1}F_n \qquad \text{すべての正の整数} n.$$

基底段階 $k = 1$。右辺は $F_1F_{n+1} + F_0F_n = 1\cdot F_{n+1} + 0 = F_{n+1}$ であり、これは左辺に等しい。よって $P(1)$ は成り立つ。

帰納段階（*inductive step*）。ある $k \geq 1$ について $P(k)$ が成り立つと仮定し、n を任意の正の整数とする。

考えてみよう 仮定は F_{n+k} についての主張だが、必要なのは F_{n+k+1} である。仮定にはどの n を代入すればよいか。

$P(k)$ はすべての正の整数について成り立つので、$(n+1)+k = n+(k+1)$ であることに注意して、n の代わりに $n+1$ として適用できる。

$$\begin{aligned} F_{n+(k+1)} = F_{(n+1)+k} &= F_k F_{n+2} + F_{k-1}F_{n+1} && (P(k)\text{ を用いる、代入値}n+1) \\ &= F_k(F_{n+1}+F_n) + F_{k-1}F_{n+1} && (\text{漸化式による}F_{n+2}) \\ &= (F_k + F_{k-1})F_{n+1} + F_k F_n \\ &= F_{k+1}F_{n+1} + F_k F_n && (\text{漸化式、}k \geq 1). \end{aligned}$$

これはまさにこの n に対する $P(k+1)$ であり、n は任意であった。よって帰納法により、すべての正の整数 k について $P(k)$ が成り立つ。すなわち、

$$F_{n+k} = F_k F_{n+1} + F_{k-1}F_n \qquad \text{すべての正の整数}n,k,$$

となり、求める結果を得る。

（別の方法として、n を固定して k に関する二段階の帰納法を用いることもできる。$k=1$ と $k=2$ を確かめ、$k-1$ と k に対する式を足し合わせればよい。どちらの方法でもよいが、上の方法では基底段階が一つで済む。）

検算

- $n=6$ でのカッシーニの恒等式：$F_7F_5 - F_6^2 = 13\cdot 5 - 64 = 1 = (-1)^6$。
- $n=3$、$k=4$ での加法公式：$F_7 = 13$ であり、$F_4F_4 + F_3F_3 = 9+4 = 13$。
- $k=n$ とおくと $F_{2n} = F_n(F_{n+1}+F_{n-1})$ を得る。$n=3$ のとき、これは $F_6 = 2\cdot(3+1) = 8$ である。

積の公式は $1 \leq n < 150$ について、加法公式はすべての $1 \leq n,k < 90$ について、コンピュータで確認した。

よくある間違い

- 符号を逆にしてしまう。$C_1 = -1$ であるから、答えは $(-1)^n$ であって $(-1)^{n+1}$ ではない。
- 加法公式で、n を固定して k に関する帰納法を行いながら、仮定を $n+1$ に対して用いてしまう。これが正当なのは、仮定がすべての n について述べられている場合に限る。
- $F_{n+1} - F_n = F_{n-1}$ を用いる際に、$n \geq 1$ が必要であることに触れない。

STEP のその先へ

二つの恒等式はいずれも、一つの行列（matrix）の事実の影である。すなわち $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix}F_{n+1} & F_n\\ F_n & F_{n-1}\end{pmatrix}$ である。行列式（determinant）をとれば積の公式（カッシーニの恒等式（Cassini's identity））がただちに得られ、$M^{n+k} = M^k M^n$ と書けば加法公式が得られる。カッシーニの恒等式からは、隣り合うフィボナッチ数（Fibonacci numbers）が互いに素（coprime）であることもわかり、さらに加法公式と組み合わせると、$\gcd(F_m, F_n) = F_{\gcd(m,n)}$ という目を見張る結果を証明できる。この種の整数論を探究するには、ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）がよい出発点であり、ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（『線形代数入門』）では固有値（eigenvalue）を通してフィボナッチ数が扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。