解答例

STEP II 1996、第 2 問

純粋数学 ・ 非線形連立方程式

> **STEP II 1996、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q2

鍵となる考え方

これらの方程式は x, y, z について線形（linear）ではないが、どの項もわずか三つの積 yz, zx, xy のいずれかである。この三つの積を未知数とみなせば、連立方程式（system of equations）は三つの線形方程式となり、消去法（elimination）で解くことができる。三つの積をすべて掛け合わせると $(xyz)^2$ が得られ、xyz をそれぞれの積で順に割れば、個々の変数が求まる。

解答

姿を変えた連立一次方程式

次のようにおく。

$$a = yz, \qquad b = zx, \qquad c = xy.$$

すると三つの方程式は次のようになる。

$$2a + b - 5c = 2, \tag{1}$$

$$a - b + 2c = 1, \tag{2}$$

$$a - 2b + 6c = 3. \tag{3}$$

(2) より $a = 1 + b - 2c$ である。これを (1) に代入すると

$$2(1 + b - 2c) + b - 5c = 2 \quad \Longrightarrow \quad 3b - 9c = 0 \quad \Longrightarrow \quad b = 3c.$$

(3) に代入すると

$$(1 + b - 2c) - 2b + 6c = 3 \quad \Longrightarrow \quad -b + 4c = 2.$$

$b = 3c$ と合わせると $c = 2$ が得られ、したがって $b = 6$、$a = 1 + 6 - 4 = 3$ である。係数行列（coefficient matrix）の行列式（determinant）は $-3 \neq 0$ であるから、これがこの連立一次方程式の**唯一の**解である。

$$yz = 3, \qquad zx = 6, \qquad xy = 2.$$

$xyz = \pm 6$ を示す

三つの積をすべて掛け合わせると

$$(yz)(zx)(xy) = x^2y^2z^2 = (xyz)^2 = 3 \times 6 \times 2 = 36,$$

となるので、求めるとおり $xyz = 6$ または $xyz = -6$ である。

> **考えてみよう** これで xyz と、yz, zx, xy のそれぞれがわかった。x 単独の値はどうすれば得られるだろうか？

どの積も零ではないので、x, y, z のいずれも零ではなく、割り算をしてよい。

$$x = \frac{xyz}{yz}, \qquad y = \frac{xyz}{zx}, \qquad z = \frac{xyz}{xy}.$$

とりうる値

$xyz = 6$ ならば、$x = 6/3 = 2$、$y = 6/6 = 1$、$z = 6/2 = 3$ である。

$xyz = -6$ ならば、$x = -2$、$y = -1$、$z = -3$ である。

以上の各段階はすべて必然的に導かれたものであるから、これらが唯一の候補である。そして両者ともともとの方程式を満たす（方程式には二つの変数の積しか現れないので、三つの変数すべての符号を反転させても方程式は変わらない）。よって

$$(x, y, z) = (2, 1, 3) \quad \text{または} \quad (x, y, z) = (-2, -1, -3).$$

検算

$(2, 1, 3)$ を代入すると $yz = 3, zx = 6, xy = 2$ であるから、左辺はそれぞれ $6 + 6 - 10 = 2$, $3 - 6 + 4 = 1$, $3 - 12 + 12 = 3$ となる。三つとも一致する。$|p| \leq 12$, $1 \leq q \leq 4$ を満たす分数 p/q からなるすべての三つ組についてコンピュータで探索したところ、ちょうど上の二つの解が見つかった。また、厳密な計算により、この連立一次方程式がただ一つの解 $(a, b, c) = (3, 6, 2)$ をもつことも確かめられる。

よくある間違い

- $(xyz)^2 = 36$ の平方根を変数ごとに別々にとり、たとえば $x = \pm 2, y = \pm 1, z = \pm 3$ と独立に書いてしまう。これでは三つ組が八つできるが、実際に成り立つのは二つだけである。xyz の符号は一つに定まるので、各符号は連動しているのである。
- 負の根を忘れて、$(2, 1, 3)$ だけを答えてしまう。

STEP のその先へ

扱いにくい式に新しい名前をつけて非線形（nonlinear）の問題を線形の問題に変えるという工夫は、対数をとって $y = Ae^{kx}$ のような曲線をデータに当てはめることから、置換（substitution）によって微分方程式（differential equation）を解くことまで、いたるところで使われている。連立方程式が線形になりさえすれば、行列と行列式によって解が一意かどうかがただちにわかる。これは線形代数（linear algebra）の最初の講義の出発点である。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、まさにこの精神で消去法と行列式を展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。