解答例

STEP II 1996、第 13 問

確率・統計 ・ 格子上のランダムウォーク

> **STEP II 1996、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q13

鍵となる考え方

この恒等式（identity）はヴァンデルモンド（Vandermonde）の恒等式であり、両辺の t^n の係数（coefficient）を比較すればよい。歩行については、どの一歩でもちょうど 1 だけ変化する一つの量、すなわち私のホテルから北へ何区画、西へ何区画離れているかの和に注目するとよい。私が一歩進むごとにこの量は 1 増え、友人が一歩進むごとに 1 減る。したがって、私たちが出会えるのはただ一つの時刻、交差点が並ぶただ一本の対角線上だけであり、出会う確率（probability）はちょうど恒等式の和になる。

解答

恒等式

$(1+t)^n$ における t^r の係数は $\binom{n}{r}$ である。積 $(1+t)^n(1+t)^n$ の t^n の項は、ある $r = 0, 1, \ldots, n$ について、第 1 の因数から t^r を、第 2 の因数から t^{n-r} を選ぶことで得られる。よって左辺の t^n の係数は

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}\binom{n}{n-r},$$

であり、右辺では $\binom{2n}{n}$ である。両者を等しいとおけば求める恒等式が得られる。同じ議論を $(1+t)^a(1+t)^b = (1+t)^{a+b}$ に適用すると、より一般的な形

$$\sum_{r} \binom{a}{r}\binom{b}{n-r} = \binom{a+b}{n}, \qquad (*)$$

が得られる。これは後で必要になる。

どこで出会えるか

私のホテルを原点とし、区画を単位として東向きに x、北向きに y をとる。すると友人のホテルは $(-n, n)$ にある。任意の位置に対して

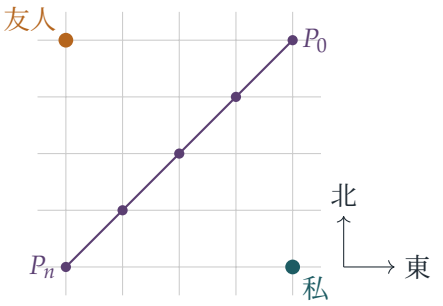
$$D = y - x,$$

と定める。これは私のホテルから北へ何区画、西へ何区画離れているかの和である。北または西へ進むと D は 1 増え、南または東へ進むと 1 減る。したがって t 分歩いた後、私は $D = t$ にあり、$D = 2n$ から出発した友人は $D = 2n - t$ にある。D は歩くにつれて一定の割合で変化するので、これは区画の途中も含めてあらゆる瞬間に成り立つ。

同じ時刻に同じ場所にいるためには D の値が等しくなければならないので、$t = 2n - t$、すなわち $t = n$ である。よって私たちが出会えるのはちょうど n 分後だけであり、そのとき $y - x = n$ を満たす交差点においてである。私の n 歩では領域 $-n \le x \le 0$、$0 \le y \le n$ の外に出ることはないので、出会いうる点は

$$P_r = (-r, n - r), \qquad r = 0, 1, \ldots, n,$$

である。これらは、私のホテルから北へ n 区画の交差点と西へ n 区画の交差点を結ぶ、正方形の対角線上にある $n + 1$ 個の交差点である。（特に、区画の途中ですれ違うことは決してない。）



図は $n = 4$ の場合を示している。出会いうる点は対角線上の点である。

出会う確率

n 分後に私が P_r にいるのは、n 歩のうち r 歩が西、$n - r$ 歩が北であるときであり、かつそのときに限る。n 歩の各列の確率は 2^{-n} なので

$$\mathrm{P}(\text{私の位置が} P_r) = \binom{n}{r} \frac{1}{2^n}.$$

友人が $(-n, n)$ から n 歩で $P_r = (-r, n - r)$ に到達するのは、そのうち $n - r$ 歩が東、r 歩が南であるときであり、かつそのときに限る。その確率は $\binom{n}{n-r} 2^{-n}$ である。私たち

の歩行は独立（independent）であり、異なる r に対する事象「二人とも P_r にいる」は互いに排反（mutually exclusive）なので、恒等式により

$$\mathrm{P}(\text{出会う}) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}\binom{n}{n-r}\frac{1}{4^n} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n},$$

となる。

$2k$ 分遅れて出発する場合

今度は友人が出発した時点から時刻 T を測る。$T \geq 2k$ のとき私は $T-2k$ 分歩いているので $D = T-2k$ にあり、友人は $D = 2n-T$ にある。これらが等しくなるのは $T = n+k$ のときだけである。このとき私は $n-k$ 歩（ここで $k \leq n$ なので、これは負でない整数である）、友人は $n+k$ 歩進んでいる。$n+k \geq 2k$ なので、私がまだホテルで眠っている間に友人が対角線の私の側に到達することはない。やはり出会えるのは交差点だけであり、区画の途中で出会うことはない。

$n-k$ 歩のうち r 歩が西であれば、私は $(-r, n-k-r)$ にいる。その確率は $\binom{n-k}{r}2^{-(n-k)}$ である。友人が同じ点にいるのは、$n+k$ 歩のうち $n-r$ 歩が東、$k+r$ 歩が南のときであり、その確率は $\binom{n+k}{n-r}2^{-(n+k)}$ である。前と同様に r について和をとると、$a = n-k$、$b = n+k$ とした $(*)$ により

$$\mathrm{P}(\text{出会う}) = \frac{1}{2^{n-k}\,2^{n+k}} \sum_{r=0}^{n-k} \binom{n-k}{r}\binom{n+k}{n-r} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n},$$

となる。

考えてみよう 寝坊してもまったく違いが生じないのはなぜだろうか。

友人の視点から歩行を眺め、私の位置を友人に対する相対位置で測ってみよう。友人の一歩（南または東）も私の一歩（北または西）も、友人に対する私の相対位置を北へ 1 区画か西へ 1 区画、それぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で独立に動かす。二人はどちらの方向にも n 区画離れた状態から出発し、合計 $2n$ 歩（私の歩数と友人の歩数の和）が相対的な「北」の動き n 回と「西」の動き n 回からなるときに、かつそのときに限り出会う。どちらがどの歩を進めるかは関係ないので、$2n$ 歩を n と n に分けても、$n-k$ と $n+k$ に分けても、答えは $\binom{2n}{n}/2^{2n}$ である。k に関する条件は、私が自分の分の歩数を実際に歩けることを保証しているにすぎない。n が大きいとき、この確率はおよそ $1/\sqrt{\pi n}$ で小さく、私が偶数分だけ寝坊してもしなくても同じである。

$n = 1$ で 1 分遅れる場合

今度は私が $D = T-1$、友人が $D = 2-T$ にあり、これらが等しくなるのは $T = \frac{3}{2}$ のときだけである。この時刻には二人とも区画のちょうど中ほどにいる。したがって二

人が同じ時刻に同じ交差点にいることは**決して**なく、出会うことを交差点で出会うことと解釈するなら、確率は 0 である。偶奇（parity）が変わったのである。歩数の合計が今度は奇数になっている。

区画の途中ですれ違うことも（現実の二人ならそうするように）出会いに数えるなら、同じ区画を逆向きに歩くとき、二人は $T = \frac{3}{2}$ に出会う。$T = 1$ のとき私はまだホテル $(0,0)$ におり、友人は $(0,1)$ か $(-1,0)$ にいる。その後、友人が $(0,1)$ にいて南へ進み私が北へ進むか、友人が $(-1,0)$ にいて東へ進み私が西へ進めば、二人は出会う。それぞれの確率は $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$ なので

$$\mathrm{P}(\text{区画の途中で出会う}) = \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{4}.$$

検算

- 遅れのない $n = 1$ の場合、私が北へ進み友人が東へ進むか、私が西へ進み友人が南へ進めば出会う。確率は $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = \binom{2}{1}/4$ である。
- コンピュータを用いて、$n \le 5$ と許されるすべての k について歩行の組をすべて列挙し、二人の位置を 30 秒ごとに追跡した。出会う確率は、遅れが偶数である限りその値によらず $\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{5}{16}, \frac{35}{128}, \frac{63}{256}$ であり、出会いは常に予測どおりのただ一つの時刻に起きた。$n = 1$ で 1 分遅れる場合、出会いは $T = \frac{3}{2}$ における区画の途中でのものだけであり、その確率の合計は $\frac{1}{4}$ であった。
- $n = 100$ のとき $\binom{200}{100}/4^{100} \approx 0.0563$ であり、$1/\sqrt{100\pi} \approx 0.0564$ に近い。

よくある間違い

- 正方形内のどこでも、いつでも出会えると思い込むこと。量 $y - x$ によって、出会いはただ一つの時刻とただ一本の対角線に限定される。
- 出会いうる点について和をとらずに確率を 2 乗してしまうこと、あるいは P_r における友人の歩数が入れ替わっていること（友人に必要なのは東への $n - r$ 歩であり、r 歩ではない）を忘れること。

STEP のその先へ

相対位置を用いた議論はカップリング（coupling）である。二つの独立なランダムウォーク（random walk）を、長さを合わせた一つのウォークで置き換えている。$\binom{2n}{n}/4^n$ が繰り返し現れるのはこのためである。同じ量は、直線上の単純対称ランダムウォーク（simple symmetric random walk）が $2n$ 歩後に原点に戻っている確率でもあり、その

$1/\sqrt{\pi n}$ という減衰（スターリングの公式（Stirling's formula）から得られる）は、1 次元および 2 次元のそのようなウォークが確率 1 で出発点に戻るというポリア（Pólya）の定理の鍵である。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、ランダムウォークとこうした回帰確率を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。