解答例

STEP II 1996、第 11 問

力学 ・ 単振動

> **STEP II 1996、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q11

鍵となる考え方

糸の伸び、すなわちエレベーターに対する質点の位置を変数として扱う。地面に固定した座標系で質点についてニュートン（Newton）の第 2 法則（Newton's second law）を立て、既知であるエレベーターの加速度を差し引く。すると残るのは、ずれた中心のまわりの単振動（simple harmonic motion, SHM）である。伸びが正である限り糸はぴんと張った（taut）状態を保ち、単振動の解から伸びがどこまで小さくなりうるかが正確にわかる。エレベーターの加速が止まると、動くのは振動の中心だけである。エレベーターに対する質点の位置と速度はそのまま引き継がれ、それらから新しい振幅（amplitude）が求まる。

解答

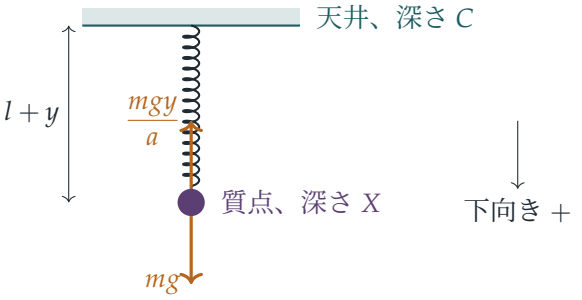
質点の質量を m とし、糸は軽く、弾性率（modulus of elasticity）λ をもつ弾性糸で、張っている間はフックの法則（Hooke's law）に従うものとしてモデル化する。以下を通して、y は糸の長さが自然長 l を超える量を表し、したがって最初は $y = a$ である。与えられた微分方程式に合う解釈はこれしかない。もし y をもとのつり合いの長さ $l + a$ から測ったとすると、右辺は $-f$ になるはずである。

運動方程式

最初のつり合いの状態では張力 $\lambda a/l$ が重力とつり合うので

$$\frac{\lambda a}{l} = mg \quad \Longrightarrow \quad \frac{\lambda}{l} = \frac{mg}{a},$$

であり、伸びが $y > 0$ のときの張力は mgy/a である。



地面に固定した点から下向きに深さを測る。天井の深さを C、質点の深さを X とすると、$X-C=l+y$ である。エレベーターは加速度 f で下降するので $\ddot{C}=f$ である。糸が張っている間、質点について鉛直方向（下向き）の運動方程式（equation of motion）を立てると

$$m\ddot{X}=mg-\frac{mgy}{a}.$$

$y=X-C-l$ であるから $\ddot{y}=\ddot{X}-\ddot{C}=\ddot{X}-f$ となり、したがって

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{a}y=g-f,$$

が示された。

糸は張ったままであり、振幅は af/g

$\omega^2=g/a$ とおく。定数の特殊解（particular solution）は $y=(g-f)/\omega^2=a(g-f)/g$ であるから、一般解（general solution）は

$$y=a-\frac{af}{g}+A\cos\omega t+B\sin\omega t.$$

である。$t=0$ では質点はもとのつり合いの位置にあり、エレベーターとともに動いているので、$y(0)=a$、$\dot{y}(0)=0$ である。これより $A=af/g$、$B=0$ となり

$$y=a-\frac{af}{g}+\frac{af}{g}\cos\omega t.$$

を得る。これは $y=a-af/g$ を中心とする振幅 af/g の単振動である。エレベーターに対する質点の位置は $l+y$ であるから、質点はエレベーターに対して振幅 af/g で振動する。

考えてみよう フックの法則を使ったが、これは糸が張っていることを前提としている。これは循環論法ではないか？

そうではない。糸が張っていると仮定して解き、その後で、得られた解がその仮定の成り立つ範囲から決して外れないことを確かめるのである。y の最小値は

$$y_{\min} = a - \frac{2af}{g} = a\left(1 - \frac{2f}{g}\right) > 0,$$

である。これは $f < g/2$ による。よって y は正のままで、糸は常に張っており、解は自己矛盾がない。条件 $f < g/2$ が必要になるのはまさにここである。

エレベーターの加速が止まった後

$t > T$ では $\ddot{C} = 0$ であり、同じ議論から

$$\ddot{y} + \omega^2 y = g,$$

を得る。これは $y = a$、すなわち本来のつり合いの伸びを中心とする単振動である。$z = y - a$ とおくと $\ddot{z} + \omega^2 z = 0$ となる。

考えてみよう この新しい運動の初期条件は何か？

$t = T$ でエレベーターの加速度は不連続に変わるが、速度 $\dot{C}$ は不連続にはならず、質点の位置と速度も同様である。よって $y = X - C - l$ と $\dot{y} = \dot{X} - \dot{C}$ は $t = T$ で連続である。第 1 段階の結果から、$t = T$ において

$$z = \frac{af}{g}(\cos\omega T - 1), \qquad \dot{z} = -\frac{af}{g}\,\omega \sin\omega T.$$

である。単振動 $\ddot{z} = -\omega^2 z$ では、振幅 R は任意の時刻において $R^2 = z^2 + \dot{z}^2/\omega^2$ を満たす（これはエネルギー保存則であり、あるいは $z = R\cos(\omega t + \varepsilon)$ に恒等式 $\cos^2 + \sin^2 = 1$ を適用したものである）。したがって

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{a^2 f^2}{g^2}\left[(1 - \cos\omega T)^2 + \sin^2\omega T\right] \\ &= \frac{a^2 f^2}{g^2}\,(2 - 2\cos\omega T) \\ &= \frac{a^2 f^2}{g^2} \cdot 4\sin^2 \tfrac{1}{2}\omega T, \end{aligned}$$

となる。ここで $1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{1}{2}\theta$ を用いた。よって新しい振幅は

$$R = \frac{2af}{g}\,|\sin\tfrac{1}{2}\omega T|,$$

であり、題意が示された。

糸がたるむ（slack）ことはない。このとき最小の伸びは

$$a - R \;\geq\; a - \frac{2af}{g} = a\left(1 - \frac{2f}{g}\right) > 0,$$

であり、これもやはり $f < g/2$ による。よって常に $y > 0$ であり、運動方程式は有効なままである。

検算

- T が周期のちょうど整数倍、すなわち $\omega T = 2k\pi$ ならば、エレベーターの加速が止まる瞬間に質点は $y = a$ に戻っており、エレベーターに対して静止している。公式は振幅 0 を与える。質点は静止してぶら下がることになり、当然そうなるべきである。
- ωT が π の奇数倍ならば、質点は最高点 $y = a - 2af/g$ にあり、エレベーターに対して瞬間的に静止している。新しい中心は $y = a$ であるから振幅は $2af/g$ となり、これは公式の最大値である。
- 数値的にも、ランダムな a、$f < g/2$、T について、地面に固定した座標系で運動全体（エレベーターと質点。糸がたるんだら張力を 0 にする）を時間刻みで計算した。たとえば $a = 0.546$、$f/g = 0.337$、$\omega T = 15.27$ のとき、振幅は 0.18380 と 0.35864 となり、af/g および $\frac{2af}{g}|\sin\frac{1}{2}\omega T|$ と有効数字 6 桁まで一致した。また、伸びが $a - 2af/g$ を下回ることはなかった。

よくある間違い

- y をもとのつり合いの長さ $l + a$ から測ってしまう。そうすると右辺は $g - f$ ではなく $-f$ になる。
- 第 2 段階を $\dot{y} = 0$ から始め直してしまう。$t = T$ で質点は一般にエレベーターに対して動いており、その速度も振幅に寄与する。
- f の符号を誤る。**下向き**に加速するエレベーターでは実効的な重力加速度が $g - f$ に減るので、振動の中心は上に移る。

STEP のその先へ

エレベーターの加速度を差し引くことは、加速する座標系で考えることと同じである。そこでは一様な加速度 f が、余分な重力場 $-f$ のようにはたらく。この考え方は見かけの力（fictitious forces）へとつながり、さらにはアインシュタイン（Einstein）の等価原理（equivalence principle）へと至る。第 2 段階は、力が階段状に変化することで駆動される振動子の簡単な例である。その応答は、振動に対してどの時点で力の変化が起こるかによって決まり、これを扱う一般的な道具がグリーン関数（Green's

functions)（デュアメルの原理（Duhamel's principle））である。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、非慣性系（non-inertial frames）と振動子をこうした精神で扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。