解答例

STEP II 1996、第 10 問

力学 ・ 回転する車輪からの放物運動

STEP II 1996、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/96-s2-q10

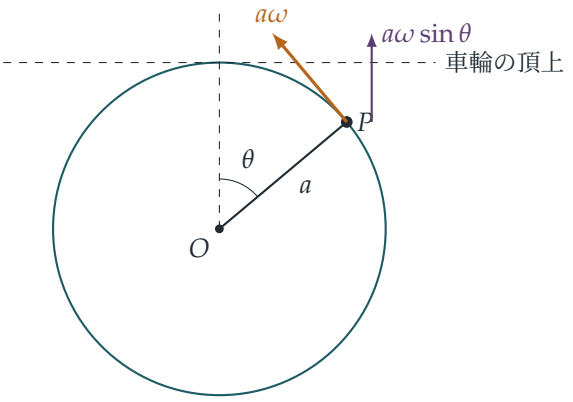
鍵となる考え方

手を離した瞬間から、ヒロインは放物運動をする物体（projectile）となり、その初期位置と初速度は車輪上のどこにいたかによって決まる。高さに関係するのは鉛直方向の運動だけなので、最高点の高さは、手を離した位置の高さに、速度の鉛直成分によって得られる上昇分を加えたものである。これにより高さは手を離す角度という 1 つの変数の関数として表され、問題は「この関数が車輪の頂上を上回ることができるのはどのようなときか、またその最大値はいくらか」ということになる。

解答

設定

ヒロインを車輪の縁とともに運動する質点（particle）とみなし、空気抵抗は無視する。車輪の中心を O とし、OP が鉛直上向きと角 θ（$0 \leq \theta \leq \pi$）をなす点 P で手を離すとする。縁上での速さは $a\omega$ であり、その向きは P における接線（tangent）の方向である。



P における接線は OP に垂直なので、水平方向と角 θ をなす。手を離すときに車輪の頂上へ向かって動いているならば、速度の上向き成分は $a\omega\sin\theta$（紫色で示したもの）である。頂上から遠ざかる向きに動いているならば、鉛直方向の速度は下向きまたは 0 なので、手を離した点より高く上がることはなく、その点は頂上より高くない。したがって、このような場合は考えなくてよい。

手を離す瞬間の O からの高さは $a\cos\theta$ である。重力だけを受けて鉛直方向の速度は $a\omega\sin\theta$ から 0 まで減少し、$v^2 = u^2 - 2gs$ により、さらに $(a\omega\sin\theta)^2/(2g)$ だけ上昇する。よって、車輪の頂上から測った最高点の高さは

$$H(\theta) = a\cos\theta + \frac{a^2\omega^2\sin^2\theta}{2g} - a.$$

である。$c = \cos\theta \in [-1,1]$、$k = \dfrac{a\omega^2}{2g}$ とおく。このとき $\sin^2\theta = 1 - c^2$ であり、

$$\begin{aligned}\frac{H}{a} &= c - 1 + k(1-c^2)\\ &= (1-c)[k(1+c)-1].\end{aligned}$$

ω_0 を求める

$c = 1$（頂上で手を離す）のときは、予想どおり $H = 0$ である。$c < 1$ のときは因数 $1-c$ が正なので、$H > 0$ となるのは $k(1+c) > 1$ のときであり、かつそのときに限る。

> **考えてみよう** c のとりうる値の範囲で、$k(1+c)$ はどこまで大きくなりうるか。

$c < 1$ なので、$k(1+c)$ は $[0, 2k)$ のすべての値をとるが、$2k$ には達しない。したがって、

- $2k > 1$ ならば、$c < 1$ を十分 1 に近くとることで $k(1+c) > 1$ とでき、ヒロインは頂上より高く上がる。

- $2k \leq 1$ ならば、すべての $c < 1$ に対して $k(1+c) < 2k \leq 1$ なので、どの点で手を離しても $H \leq 0$ となり、頂上より高く上がることはできない。

条件 $2k \leq 1$ は $a\omega^2 \leq g$ と同値である。境界の場合 $\omega^2 = g/a$ は「不可能」の側に属することに注意すると、そのような ω の最大値が存在して

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{a}}.$$

となる。（これは、車輪の外側の頂上に置かれた質点がちょうど車輪から離れはじめる角速度（angular speed）でもある。すなわち、向心加速度（centripetal acceleration）$a\omega^2$ が g に等しくなる。）

$\omega > \omega_0$ のときの最高点の高さ

このとき $2k = a\omega^2/g = \omega^2/\omega_0^2 > 1$ である。c の関数として

$$\frac{H}{a} = -kc^2 + c + k - 1$$

は上に凸な 2 次関数であり、その導関数（derivative）$1 - 2kc$ が 0 となる

$$c = \frac{1}{2k} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}.$$

で最大となる。この値は 0 と 1 の間に（端点を含まずに）あるので、許される手を離す位置（車輪の頂上の少し手前）であり、$[-1, 1]$ 全体での最大値を与える。代入すると

$$\frac{H_{\max}}{a} = -\frac{1}{4k} + \frac{1}{2k} + k - 1 = k - 1 + \frac{1}{4k}.$$

$k = \frac{1}{2}\omega^2/\omega_0^2$、したがって $\frac{1}{4k} = \frac{1}{2}\omega_0^2/\omega^2$ であるから、

$$H_{\max} = \frac{a}{2}\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 2 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) = \frac{a}{2}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2,$$

となり、これが求める結果である。この高さは、頂上へ向かって動いている途中の $\cos\theta = \omega_0^2/\omega^2$ となる位置で手を離すことにより達成される。

検算

- $\omega = \omega_0$ のとき公式は 0 を与え、境界の場合と一致する。また ω が大きいとき、公式は $a\omega^2/(2\omega_0^2) = a^2\omega^2/(2g)$ のように増加する。これは O の高さから速さ $a\omega$ で真上に投げ上げた質点が到達する高さである。実際、ω が大きいとき最適な手を離す位置は、速度が鉛直となる $\theta = \frac{\pi}{2}$ の近くである。
- 次元：ω/ω_0 は無次元（dimensionless）なので、$H_{\max}$ は長さの次元をもつ。

- 数値的に、$a = 2\,\mathrm{m}$、$\omega = 2\omega_0$ とすると、公式は $\frac{a}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25\,\mathrm{m}$ を与える。$\cos\theta = \frac{1}{4}$ の位置から放物運動を数値的に追跡しても同じ値が得られ、すべての手を離す角度について調べると、これより高くなるものはないことが確かめられる。

よくある間違い

- 高さを車輪の頂上からではなく中心から測ってしまう。H の中の $-a$ が重要である。
- 最適な手を離す位置を、速度が鉛直となる $\theta = \frac{\pi}{2}$ だと思い込む。そこで最大になるのは追加の上昇分であって、全体の高さではない。
- 最適な $c = \omega_0^2/\omega^2$ が実際に $[-1, 1]$ に含まれることの確認を忘れる。

STEP のその先へ

ここで用いた方法、すなわちある量を 1 つの制御変数の関数として表して最適化するという方法は、最適制御問題（optimal-control problem）の最も単純な形である。これに近い話題として、**軌道の包絡線**（envelope of trajectories）（「安全放物線」（parabola of safety））がある。これは車輪上の手を離す点から到達可能なすべての点の境界であり、同様の判別式（discriminant）を用いる議論によって求めることができる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、放物運動と回転運動を大学 1 年生のレベルで展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。