解答例

STEP II 1996、第 1 問

純粋数学 ・ 二項級数の係数

> **STEP II 1996、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q1

鍵となる考え方

三つの括弧の積における係数は、各括弧から一つずつ項を選び、その次数の和が目標の次数になるような選び方すべてにわたる和である。(i) では、これは有限個の場合を注意深く整理して数え上げることを意味する。(ii) では、係数 $1, -2, 3, -4, \ldots$ が $(1+x)^{-2}$ の係数であることに気づける。そして括弧に追加された項は、x^6 の係数において打ち切り（truncation）の影響が見えなくなるためにちょうど必要な項になっている。

解答

小問 (i)

括弧を $P(x) = \sum_{k=0}^{4} a_k x^k$ と書く。ただし

$$a_k = (-1)^k(k+1), \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

とする。三つの因数から $a_p x^p$、$a_q x^q$、$a_r x^r$ を選んだとき、それが x^6 に寄与するのは $p+q+r=6$ のときであり、かつそのときに限る。よって求める係数（coefficient）は

$$\sum_{\substack{p+q+r=6 \\ 0\le p,q,r\le 4}} a_p a_q a_r.$$

である。どの項も符号は $(-1)^{p+q+r} = (-1)^6 = +1$ であるから、符号は無視して積 $(p+1)(q+1)(r+1)$ を足し合わせればよい。

考えてみよう 指数の選び方を漏れなく、また重複なく数えるにはどうすればよいか。

和が 6 で各成分が 4 以下であるような順序を考えない三つ組 $\{p,q,r\}$ を列挙し、それぞれについて、三つの（区別できる）括弧から取り出す順序の数を掛ければよい。順序の数は、成分がすべて異なれば 6 通り、ちょうど二つが等しければ 3 通り、三つすべてが等しければ 1 通りである。

指数	積 $(p+1)(q+1)(r+1)$	順序の数	寄与
$4,2,0$	$5\cdot3\cdot1=15$	6	90
$4,1,1$	$5\cdot2\cdot2=20$	3	60
$3,3,0$	$4\cdot4\cdot1=16$	3	48
$3,2,1$	$4\cdot3\cdot2=24$	6	144
$2,2,2$	$3\cdot3\cdot3=27$	1	27

これで可能性はすべて尽くされている。最大の成分は 4、3、2 のいずれかであり（$3\times1<6$ であるからこれより小さくはなりえず、また 4 を超えることもできない）、最大の成分それぞれについて、残りを二つのより小さな部分に分ける方法をすべて列挙したからである。足し合わせると

$$90+60+48+144+27=369,$$

となり、x^6 の係数は $\boxed{369}$ である。

小問 (ii)

今度は括弧が $Q(x)=\sum_{k=0}^{6}(-1)^k(k+1)x^k$ である。$|x|<1$ で成り立つ二項展開（binomial expansion）により

$$(1+x)^{-2}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-2}{k}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)x^k,$$

が得られる。$\binom{-2}{k}=\frac{(-2)(-3)\cdots(-k-1)}{k!}=(-1)^k(k+1)$ だからである。したがって $Q(x)$ は、$(1+x)^{-2}$ の展開を x^6 の項までで打ち切ったものである。すなわち、あるべき級数（power series）$R(x)$ を用いて

$$(1+x)^{-2}=Q(x)+x^7R(x)$$

と書ける。

考えてみよう 欠けている残りの部分 $x^7R(x)$ が、3 乗における x^6 の係数に影響しないのはなぜか。

3 乗すると

$$(1+x)^{-6} = Q(x)^3 + 3Q(x)^2\,x^7R(x) + 3Q(x)\,x^{14}R(x)^2 + x^{21}R(x)^3.$$

となる。第 1 項以外の項はどれも x^7 にべき級数を掛けたものなので、x^7 より低い次数の x のべきを含まない。よって $Q(x)^3$ における x^6 の係数は、$(1+x)^{-6}$ における x^6 の係数に等しい。（言い換えれば、指数の和が 6 になる積では、どの因数からも次数 7 以上の項が使われることはない。）

再び二項展開により

$$\binom{-6}{6} = \frac{(-6)(-7)(-8)(-9)(-10)(-11)}{6!} = \frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{720} = \binom{11}{5} = 462.$$

である。したがって $Q(x)^3$ における x^6 の係数は $\boxed{462}$ である。

検算

小問 (ii) は小問 (i) の独立な検算にもなる。二つの括弧の違いは $-6x^5$ と $7x^6$ の項だけなので、$462 - 369$ は、これらのいずれかを使う寄与すべての合計になるはずである。$7x^6$ を使う項では、残り二つの括弧から 1 を取らなければならない。位置は 3 通りで、それぞれ 7 を与えるから、合計は 21 である。$-6x^5$ を使う項では、残り二つの括弧から $-2x$ と 1 を取らなければならない。並べ方は $3\times 2 = 6$ 通りで、それぞれ $(-6)(-2)(1) = 12$ を与えるから、合計は 72 である。実際、$21 + 72 = 93 = 462 - 369$ となっている。コンピュータで 3 乗を展開すると、直接 369 と 462 が得られる。

よくある間違い

- 順序の数え忘れ：指数 $4, 2, 0$ は三つの括弧から 1 通りではなく 6 通りの方法で現れうる。
- 小問 (i) で、成分に 5 や 6 を含む三つ組を入れてしまう。この括弧は x^4 で終わっている。
- 項ごとに符号を気にしてしまう：指数の和は常に 6 なので、寄与はすべて正である。

STEP のその先へ

(ii) の議論は**形式的べき級数**（formal power series）の理論の出発点である。級数は収束（convergence）をまったく考えることなく係数ごとに掛け合わせることができ、積における x^n の係数は、各因数の x^n までの項だけで決まる。このように数列をその母関数（generating function）を通して扱うことは、強力な数え上げの道具である。たとえば、$(1-x)^{-m}$ における x^n の係数は、n を m 個の非負整数の順序付きの和として表す方法の数を数えている。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策の問題集）には、この種の展開を扱う STEP 形式の演習がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。