解答例

STEP I 1996、第 9 問

力学 ・ 弾性ひもとエネルギー

> **STEP I 1996、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q9

鍵となる考え方

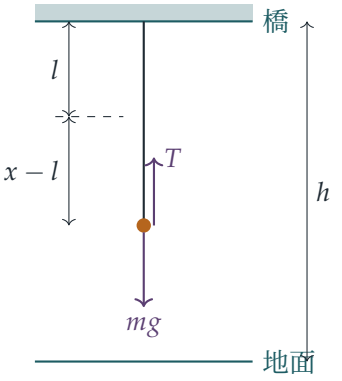
この問題はすべてエネルギーで片づく。仕事をする力は重力とロープの張力（tension）だけであり、どちらも保存力（conservative force）であるから、運動方程式を完全に解く必要はない。「かろうじて地面にぶつからない」とは、ちょうど地面に達した瞬間に速さがゼロになるということである。最大の速さは加速度の符号が変わるところ、すなわち張力が重力とつり合うところで達成される。

解答

飛び降りる人を橋の上で静止状態から出発する質点とみなし、ロープは軽くフックの法則（Hooke's law）に従うものとし、空気抵抗は無視する。落下した距離を x とする。$x \leq l$ のときロープはたるんでおり、彼女は自由落下（free fall）している。$x > l$ のとき伸びは $x - l$ であり、フックの法則より張力は

$$T = \frac{mg}{k} \cdot \frac{x - l}{l},$$

であって、ロープには弾性エネルギー（elastic energy）$\frac{mg}{k} \cdot \frac{(x-l)^2}{2l}$ が蓄えられる。



橋の高さ

最下点では彼女は一瞬静止する。かろうじて地面にぶつからないのだから、この最下点は地面そのもの、すなわち $x = h$ である。明らかに $h > l$ である。もしロープが一度も張らなければ、彼女は自由落下を続け、勢いよく地面にぶつかってしまうからである。橋を離れてから最下点に至るまで、運動エネルギーは始めも終わりもゼロであるから、失われた位置エネルギー（gravitational potential energy）はすべてロープに蓄えられる：

$$mgh = \frac{mg}{k} \cdot \frac{(h-l)^2}{2l}.$$

両辺に $2kl/(mg)$ を掛けると $2klh = (h-l)^2 = h^2 - 2hl + l^2$ となるので

$$h^2 - 2hl(k+1) + l^2 = 0,$$

が示された。解の公式（quadratic formula）より

$$h = l(k+1) \pm l\sqrt{(k+1)^2 - 1} = l\left(k+1 \pm \sqrt{k^2+2k}\right).$$

考えてみよう どちらの解が求めるものか。また、なぜもう一方の解がそもそも現れるのか。

$k > 0$ より $\sqrt{k^2+2k} > \sqrt{k^2} = k$ であるから、マイナスの符号をとると $h < l(k+1-k) = l$ となる。しかし、エネルギーの式はロープが $h - l$ だけ伸びていると仮定しており、これは $h > l$ のときにしか意味をもたない。余分な解は 2 乗したことから生じたものである。それは、ロープが実際には生み出せない「縮み」に対して同じ $(h-l)^2$ の値を与えるのである。（2 つの解の積は l^2 であるから、一方は l より大きく、他方は小さい。）したがって

$$h = l\left(k+1+\sqrt{k^2+2k}\right).$$

最大の速さ

ロープがたるんでいる間、彼女は下向きに加速度 g で加速する。ロープが張ると、下向きを正としてニュートンの運動の第 2 法則（Newton's second law）より

$$m\ddot{x} = mg - \frac{mg}{k} \cdot \frac{x-l}{l}.$$

これは $x - l < kl$ の間は正であり、その後は負である。よって彼女は伸びが kl になるまで、すなわち張力が重力に等しくなる点まで速さを増し、それ以降は減速する。したがって最大の速さは $x = l + kl$ で達成される。橋からこの点までの力学的エネルギー保存則（conservation of energy）より

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}mv^2 &= mg(l+kl) - \frac{mg}{k} \cdot \frac{(kl)^2}{2l} \\ &= mgl(1+k) - \tfrac{1}{2}mgkl.\end{aligned}$$

2 倍して m で割ると

$$v^2 = 2gl + 2kgl - kgl = (k+2)gl,$$

が示された。

検算

- $k \to 0$ のとき、ロープは非常に硬くなる。このとき $h \to l$（彼女はロープをほとんど伸ばさない）であり、$v^2 \to 2gl$ は距離 l を自由落下した後の速さである。ロープがほぼ即座に彼女を止めるのだから、これは正しい。
- ランダムな k と l に対して運動方程式を数値的に刻んで解くと、最下点と最大の速さは公式と小数第 5 位まで一致する。たとえば $k = 1.5$、$l = 10\,\mathrm{m}$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ とすると $h = 10(2.5 + \sqrt{5.25}) \approx 47.9\,\mathrm{m}$、$v^2 = 343$ となり、$v \approx 18.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ である。

よくある間違い

- ロープが張った瞬間に最大の速さになるとしてしまう。その瞬間は張力がゼロなので、彼女はまだ加速している。
- 弾性エネルギーの式で、伸び $x - l$ の代わりに落下距離全体 x を使ってしまう。
- $h > l$ を確かめずに h の 2 つの解を両方残してしまう。

STEP のその先へ

ロープが張った後の運動は、つり合いの伸び kl を中心とする単振動（simple harmonic motion）であり、落下の後半は角振動数 $\sqrt{g/(kl)}$ の正弦曲線の一部となる。このように自由落下と振動子の間で切り替わる区分的な系は、エネルギーの方法や相平面（phase plane）の図が滑らかでない力をどう扱うかを学ぶよい入門となる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、このレベルでエネルギー保存と振動を丁寧に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。