解答例

STEP I 1996、第 8 問

純粋数学 ・ 循環小数

> **STEP I 1996、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q8

鍵となる考え方

循環する数字の並びは、姿を変えた等比級数（geometric series）である。並びが 1 回繰り返されるごとに、直前の並びを右へ k 桁ずらしたものになるので、10^{-k} 倍される。小問 (i) は最も単純な場合である。小問 (ii) では、小数展開を、循環が始まる前の部分（有限小数）と循環する末尾の部分（等比級数）とに分ける。すると、どちらの部分も整数を 10 の累乗または $10^k - 1$ で割ったものになることがわかる。

解答

小問 (i)

並び 38 は 2 桁ごとに繰り返されるので、

$$\begin{aligned} 0.383838\ldots &= \frac{38}{100} + \frac{38}{100^2} + \frac{38}{100^3} + \cdots \\ &= \frac{38/100}{1 - 1/100} = \frac{38}{99}, \end{aligned}$$

となる。ここでは公比（common ratio）$\frac{1}{100}$ の等比級数の和を求めた。$|\frac{1}{100}| < 1$ であるから、この計算は正当である。$38 = 2 \times 19$ と $99 = 3^2 \times 11$ には共通の素因数がないので、これは既約分数（lowest terms）である：

$$0.383838\ldots = \frac{38}{99}.$$

小問 (ii)

（問題文に印刷された展開 $0\cdot a_1a_2a_2\cdots$ は $0\cdot a_1a_2a_3\cdots$ の誤植である。）各 a_n は 0 から 9 までの数字であり、

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}.$$

この和を $n=N$ のところで分ける。

最初の N 桁　b を、10 進表記の各桁が $a_1a_2\ldots a_N$ である整数（先頭に 0 が並んでもよい）とする。すなわち、

$$b=\sum_{n=1}^{N}a_n10^{N-n}.$$

すると

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{10^n}=\frac{1}{10^N}\sum_{n=1}^{N}a_n10^{N-n}=\frac{b}{10^N}.$$

末尾の部分　すべての $n>N$ に対する条件 $a_{n+k}=a_n$ を繰り返し用いると、すべての $m\geq 0$ と $1\leq j\leq k$ に対して $a_{N+mk+j}=a_{N+j}$ が得られる（m についての数学的帰納法（induction）による。添字 $N+(m-1)k+j$ は N より大きいので、これに k を加えてよい）。したがって、第 N 位より後の展開は、並び $a_{N+1}a_{N+2}\ldots a_{N+k}$ が限りなく繰り返されたものである。c をこれらの数字をもつ整数とする：

$$c=\sum_{j=1}^{k}a_{N+j}10^{k-j}.$$

末尾の部分を k 項ずつのまとまりに分ける。すべての項が非負で、級数が収束（converge）するので、このようにまとめてよい。与えられた $m\geq 0$ に対するまとまりは

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{a_{N+mk+j}}{10^{N+mk+j}}=\frac{1}{10^{N+(m+1)k}}\sum_{j=1}^{k}a_{N+j}10^{k-j}=\frac{c}{10^N}\left(\frac{1}{10^k}\right)^{m+1}.$$

考えてみよう なぜ各まとまりは、直前のまとまりのちょうど 10^{-k} 倍なのだろうか？

まとまり m からまとまり $m+1$ へ移るとき、使われる数字は（周期性により）同じであるが、それぞれが k 桁だけ右に位置する。そのため各項は 10^k で割られる。これが、循環小数（recurring decimal）に隠れている等比級数である。

公比 $10^{-k}<1$ の等比級数の和を求めると、

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}=\frac{c}{10^N}\cdot\frac{10^{-k}}{1-10^{-k}}=\frac{c}{10^N(10^k-1)}.$$

2 つの部分を合わせる 2 つの部分を足すと、

$$x = \frac{b}{10^N} + \frac{c}{10^N(10^k - 1)},$$

となる。ここで b は最初の N 桁 $a_1 \ldots a_N$ からなる整数、c は 1 周期分 $a_{N+1} \ldots a_{N+k}$ からなる整数である。これが求める形である。

有理数であること 通分すると、

$$x = \frac{b(10^k - 1) + c}{10^N(10^k - 1)}.$$

分子は整数であり、$k \geq 1$ より $10^k - 1 \geq 9$ となるので、分母は正の整数である。したがって x は整数の比であり、x は有理数（rational number）である。

検算

- 小問 (i) は、循環前の部分がなく $k = 2, c = 38$ の場合である。公式から $38/(10^2 - 1) = 38/99$ が得られる。（$N = 1$ とすると $b = 3$、$c = 83$ となり、$\frac{3}{10} + \frac{83}{990} = \frac{380}{990} = \frac{38}{99}$ で、一致する。）
- $0.12345345\ldots$ をとり、$N = 2, k = 3, b = 12, c = 345$ とすると、$\frac{12}{100} + \frac{345}{100 \times 999} = \frac{4111}{33300} = 0.1234534534\ldots$
- さらに、循環前の部分と循環する並びを無作為に 500 通り選び、公式と展開の和とを厳密な計算で比較した。すべて一致した。

よくある間違い

- 末尾の部分に因子 10^{-N} を付け忘れる。循環する並びは第 1 位からではなく、第 $N + 1$ 位から始まる。
- 分母に $10^k - 1$ ではなく 10^k を用いてしまう。等比級数の初項は $c\,10^{-N}$ ではなく $c\,10^{-N-k}$ である。
- (i) で既約分数であることを確かめない。なぜ $\gcd(38, 99) = 1$ なのかを述べること。

STEP のその先へ

逆も成り立つ。すなわち、すべての有理数の小数展開は、ある桁から先で循環する。q で割る筆算では余りが q 通りしかありえないので、いつか同じ余りが繰り返されるか

らである。したがって無理数（irrational number）とは、小数展開がいつまでも循環に落ち着かない実数にほかならない。$1/q$ の周期（period）の長さは、q を法とする 10 の位数（order）と結びついており、これは整数論における群論（group theory）の最初の味見である。ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）は、合同式（congruence）と周期に関するこうした考え方を見事に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。