解答例

STEP I 1996、第 7 問

純粋数学 ・ 一階微分方程式

STEP I 1996、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/96-s1-q7

鍵となる考え方

「量に比例する速さで流れ出る」という記述は、そのまま 1 階（first-order）の微分方程式（differential equation）$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -ky$（ただし $k > 0$）に翻訳でき、その解は指数関数（exponential）である。e^{-k} を一つの数 b とおくと、指数関数は b^t の形になり、同じ置き換え $k = -\ln b$ によって小問 (ii) の方程式も書き直せる。その方程式は線形（linear）なので、積分因子（integrating factor）を用いれば解き切れる。

解答

小問 (i)

水は流れ出るのだから、y は y に比例する速さで減少する：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -ky \qquad \text{ただし定数} k > 0.$$

タンクに水がある間は $y > 0$ なので、変数分離（separation of variables）ができる：

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int k\,\mathrm{d}t \quad \Longrightarrow \quad \ln y = -kt + c.$$

$t = 0$ のとき $y = 1$ なので、$c = \ln 1 = 0$ である。したがって

$$y = \mathrm{e}^{-kt} = \left(\mathrm{e}^{-k}\right)^t = b^t, \qquad \text{ただし} b = \mathrm{e}^{-k}.$$

$k > 0$ より $0 < b < 1$ であり、特に求められているとおり $b < 1$ である。後のために次のことに注意しておく：

$$\ln b = -k, \qquad \text{よって} \qquad k = -\ln b > 0.$$

小問 (ii)

流出はまったく前と同じで、同じ定数 k を用いた速さ ky であり、それに加えて水が速さ a で流れ込む。よって正味の変化率は

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a - ky.$$

考えてみよう この方程式には k しか現れないのに、$\ln b$ はどこから出てくるのか。

定数 b は小問 (i) で $b = \mathrm{e}^{-k}$ によって**定義**されたものであり、流出だけを表している。したがってここでも同じ数である。$k = -\ln b$ を代入すると $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a + y\ln b$、すなわち

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y\ln b = a,$$

となり、これが求める方程式である。

これは y について線形で、定数係数（constant coefficients）の方程式である。積分因子は

$$\exp\left(-\int \ln b \,\mathrm{d}t\right) = \mathrm{e}^{-t\ln b} = b^{-t}.$$

両辺に b^{-t} を掛けると、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}b^{-t} = -b^{-t}\ln b$ であるから、左辺はちょうど一つの関数の導関数になる：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y\,b^{-t}) = a\,b^{-t}.$$

積分し、$\int b^{-t}\,\mathrm{d}t = -\dfrac{b^{-t}}{\ln b}$（$\ln b \neq 0$ なので成り立つ）を用いると、

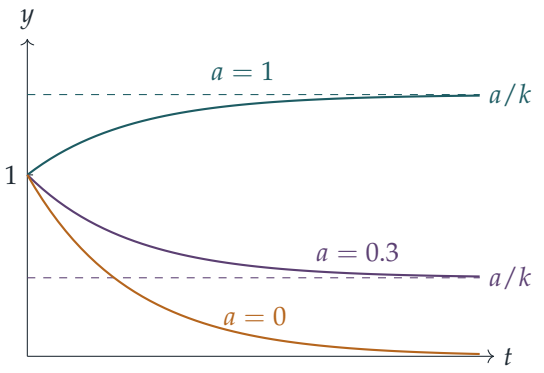
$$y\,b^{-t} = -\frac{a}{\ln b}\,b^{-t} + C.$$

$t = 0$ のとき $y = 1$ なので $1 = -\dfrac{a}{\ln b} + C$ となり、$C = 1 + \dfrac{a}{\ln b}$ を得る。両辺に b^t を掛けて、

$$\begin{aligned} y &= -\frac{a}{\ln b} + \left(1 + \frac{a}{\ln b}\right) b^t \\ &= b^t + \frac{a\,(1 - b^t)}{-\ln b}. \end{aligned}$$

どちらの形でもよい。$-\ln b = \ln(1/b) > 0$ であるから、2 番目の形のほうが読み取りやすい。すなわち、小問 (i) の解 b^t に、流入に由来する正の項が加わったものである。

$t \to \infty$ のとき、$b^t \to 0$（$0 < b < 1$ より）なので、$y \to \dfrac{a}{-\ln b} = \dfrac{a}{k}$ となる。これは平衡（equilibrium）水位であり、そこでは流出 ky が流入 a とちょうど釣り合う。$a > k$ ならタンクはこの水位に向かって満ちていき、$a < k$ ならこの水位に向かって減っていく。



図は $b = \frac{1}{2}$（よって $k = \ln 2 \approx 0.693$）の場合で、$a = 1$、$a = 0.3$ と、比較のための小問 (i) の曲線 $a = 0$ を示している。

検算

- $a = 0$ とおくと、答えは小問 (i) の結果 $y = b^t$ に帰着する。
- $t = 0$ のとき：$y = 1 + \frac{a(1-1)}{-\ln b} = 1$。
- $y = b^t + \frac{a}{\ln b}(b^t - 1)$ を微分すると $y' = b^t \ln b + ab^t$ となり、一方 $y \ln b + a = b^t \ln b + a(b^t - 1) + a = b^t \ln b + ab^t$ であるから、両者は一致する。
- 数値的には、$b = \frac{1}{2}$、$a = 1$、$t = 2$ のとき公式は $y \approx 1.3320$ を与える。ルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）で微分方程式を数値的に解いても同じ値が得られ、一般に無作為に選んだ a、b、t に対しておよそ 10^{-13} の精度で一致する。

よくある間違い

- $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ky$ と書いたうえで、流出なのだから k は負でなければならないことを忘れる。$b < 1$ を導くのはこの符号である。
- 小問 (ii) で b を新しい未知数として扱う。b は流出だけで決まるので、$\ln b = -k$ はそのまま引き継がれる。
- $\int b^{-t}\,\mathrm{d}t = -b^{-t}/\ln b$ の符号を誤る。微分して確かめること。

STEP のその先へ

これは最も単純なコンパートメントモデル（compartment model）、すなわち一定の流入と比例的な流出をもつ一つのタンクである。同じ方程式は、一定の速さで血中に点

滴され腎臓によって排出される薬物や、抵抗を通して充電されるコンデンサーも記述する。どの解も平衡値 a/k へ指数関数的に近づいていく。これは安定固定点（stable fixed point）の一例であり、連立微分方程式を学ぶときに中心となる考え方である。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（『常微分方程式入門』）は、線形 1 階微分方程式と、このような混合問題を数多く扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。