解答例

STEP I 1996、第 6 問

純粋数学 ・ 三角関数の和と積分

> **STEP I 1996、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q6

鍵となる考え方

与えられた恒等式は、隣り合う項が打ち消し合う和（telescoping sum）になるように作られている。和 $\sum \cos kx$ に $2\sin\frac{1}{2}x$ を掛けると、各項は 2 つの正弦の差になり、隣り合う差どうしが打ち消し合う。f を余弦の和として書いてしまえば、(ii) の一見厄介な積分は 1 つ 1 つの余弦の積分になり、その大部分は $[0,\pi]$ 上で 0 になる。

解答

以下、n は正の整数とする。

小問 (i)

$S=\sum_{k=1}^{n}\cos kx$ とおく。$2\sin\frac{1}{2}x$ を掛け、与えられた公式を各項に用いると、

$$\begin{aligned}2\sin\tfrac{1}{2}x\,S &= \sum_{k=1}^{n}\Big(\sin(k+\tfrac{1}{2})x-\sin(k-\tfrac{1}{2})x\Big)\\ &= (\sin\tfrac{3}{2}x-\sin\tfrac{1}{2}x)+(\sin\tfrac{5}{2}x-\sin\tfrac{3}{2}x)+\cdots+(\sin(n+\tfrac{1}{2})x-\sin(n-\tfrac{1}{2})x)\\ &= \sin(n+\tfrac{1}{2})x-\sin\tfrac{1}{2}x,\end{aligned}$$

となる。途中の項はどれも正の符号と負の符号で 1 回ずつ現れ、打ち消し合うからである。したがって

$$\sin(n+\tfrac{1}{2})x=\sin\tfrac{1}{2}x+2\sin\tfrac{1}{2}x\sum_{k=1}^{n}\cos kx.$$

$0 < x \le \pi$ のとき $0 < \frac{1}{2}x \le \frac{1}{2}\pi$ であるから $\sin\frac{1}{2}x > 0$ であり、これで割ることができる。よって

$$f(x) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{1}{2}x} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos kx,$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

考えてみよう f は $x = 0$ で定義されていない。そもそも $\int_0^\pi f(x)\,dx$ は意味のある積分なのだろうか？

意味がある。小問 (i) より、$0 < x \le \pi$ において関数 f は余弦多項式（cosine polynomial）$1 + 2\sum\cos kx$ と一致し、この多項式は $[0, \pi]$ 全体で連続である（0 での値は $2n+1$）。[1] 点での値を変えたり未定義のままにしたりしても積分の値は変わらないので、代わりに余弦の和を積分すればよい。

1 つ目の積分。各整数 $k \ge 1$ に対して

$$\int_0^\pi \cos kx\,dx = \left[\frac{\sin kx}{k}\right]_0^\pi = 0,$$

である。$\sin k\pi = 0$ だからである。したがって定数項だけが残り、

$$\int_0^\pi f(x)\,dx = \int_0^\pi 1\,dx + 2\sum_{k=1}^{n}\int_0^\pi \cos kx\,dx = \pi.$$

2 つ目の積分。次に

$$\int_0^\pi f(x)\cos x\,dx = \int_0^\pi \cos x\,dx + 2\sum_{k=1}^{n}\int_0^\pi \cos kx\cos x\,dx.$$

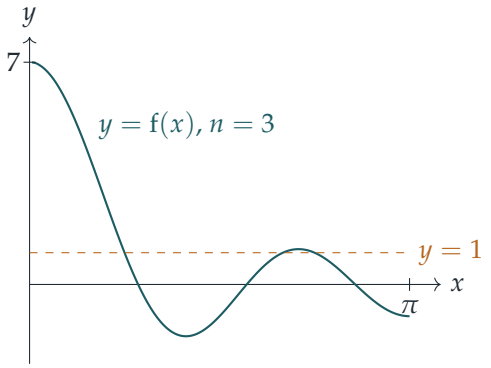
右辺の最初の積分は $[\sin x]_0^\pi = 0$ である。残りの積分には $2\cos kx\cos x = \cos(k+1)x + \cos(k-1)x$ を用いる：

$$2\int_0^\pi \cos kx\cos x\,dx = \int_0^\pi \cos(k+1)x\,dx + \int_0^\pi \cos(k-1)x\,dx.$$

ここで $k+1 \ge 2$ であるから、最初の積分は上と同様に 0 である。2 番目の積分も $k-1 = 0$ の場合を除いて 0 であり、その場合は被積分関数が 1 となって積分の値は π である。よって $k = 1$ の項だけが寄与し、

$$\int_0^\pi f(x)\cos x\,dx = \pi.$$

（もし n が 0 でもよいとすると、$f \equiv 1$ となり、この積分は 0 になる。$n \ge 1$ であればどの n についても値は π である。）



この図を見ると、1つ目の答えが n によらない理由がわかる。0 の近くの高い山（高さ $2n+1$）は振動部分によって相殺され、正味の面積は常に定数項の面積 π に等しい。

検算

- $x \to 0$ のとき $\sin(n+\frac{1}{2})x / \sin\frac{1}{2}x \to (2n+1)$ であり、余弦の和の $x=0$ での値は $1+2n$ である。両者は一致する。
- $x = \pi$ では $\mathrm{f}(\pi) = \sin(n+\frac{1}{2})\pi = (-1)^n$ であり、$1 + 2\sum_{k=1}^{n}(-1)^k = (-1)^n$ も成り立つ。
- もとの商を $n = 1, \ldots, 7$ について中点則（midpoint rule）で数値積分すると、どちらの積分も 3.14159265… となり、π と一致する。

よくある間違い

- $\sin\frac{1}{2}x$ で割ることの正当化を忘れる。これが 0 でないのは、まさに $0 < x \leq \pi$ だからである。
- すべての k について $\int_0^\pi \cos kx \cos x \,\mathrm{d}x = 0$ と書いてしまい、2つ目の積分を 0 としてしまう。$k=1$ の項は $\int_0^\pi \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi$ を与える。

STEP のその先へ

関数 f はディリクレ核（Dirichlet kernel）と呼ばれ、フーリエ級数（Fourier series）の理論の中心となる対象である。(ii) の計算は直交性（orthogonality）の例になっている：$\cos kx$ と $\cos mx$ の積を $[0,\pi]$ 上で積分すると、$k=m$ でない限り 0 になる。フーリエ係数はまさにこの方法で取り出され、関数にディリクレ核を掛けて積分すると、その関数のフーリエ級数の第 n 部分和（partial sum）が得られる。これらの部分和が

どのような場合に収束するかについての丁寧な扱いは、Abbott, *Understanding Analysis* を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。