解答例

STEP I 1996、第 5 問

純粋数学 • 複素数の平方根

> **STEP I 1996、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q5

鍵となる考え方

各小問が次の小問へとつながっている。小問 (i) は有理数部分と無理数部分を比較する問題であり、$4-2\sqrt{3}$ が完全平方（perfect square）であることを教えてくれる。小問 (ii) は複素数の平方根（square root）を求める問題であり、おなじみの「実部と虚部を比較する」という手順を踏むと、小問 (i) に帰着する。小問 (iii) は二次方程式であり、その判別式（discriminant）が小問 (ii) の数のちょうど 4 倍になっていることがわかるので、必要な平方根はすでに手元にあるのである。

解答

小問 (i)

展開すると、

$$(r+s\sqrt{3})^2 = (r^2+3s^2)+2rs\sqrt{3}.$$

これが $4-2\sqrt{3}$ に等しくなるようにしたい。r と s は有理数（rational）であるから、r^2+3s^2 と $2rs$ も有理数である。a,b,c,d を有理数として $a+b\sqrt{3}=c+d\sqrt{3}$ かつ $b\neq d$ であるとすると、$\sqrt{3}=(a-c)/(d-b)$ は有理数となるが、実際にはそうではない。したがって、有理数部分どうしと $\sqrt{3}$ の係数どうしを比較してよい：

$$r^2+3s^2=4, \qquad rs=-1.$$

すると $r\neq 0$ であるから $s=-1/r$ となり、第 1 式は

$$r^2+\frac{3}{r^2}=4 \iff r^4-4r^2+3=0 \iff (r^2-1)(r^2-3)=0.$$

となる。$r^2 = 3$ の場合は $r = \pm\sqrt{3}$ となり、有理数ではない。よって $r^2 = 1$ であり、解は

$$r = 1,\ s = -1 \qquad \text{および} \qquad r = -1,\ s = 1,$$

すなわち $r + s\sqrt{3} = \pm(1 - \sqrt{3})$ である。実際、$(1 - \sqrt{3})^2 = 1 - 2\sqrt{3} + 3 = 4 - 2\sqrt{3}$ となる。

小問 (ii)

$(p + q\mathrm{i})^2 = (p^2 - q^2) + 2pq\,\mathrm{i}$ と展開する。p と q は実数であるから、実部（real part）と虚部（imaginary part）を比較できる：

$$p^2 - q^2 = 3 - 2\sqrt{3}, \qquad pq = 1 - \sqrt{3}.$$

第 2 式から $p \neq 0$ であるので、$q = (1 - \sqrt{3})/p$ かつ $q^2 = (1 - \sqrt{3})^2/p^2 = (4 - 2\sqrt{3})/p^2$ である。これを第 1 式に代入して p^2 を掛けると、

$$p^4 - (3 - 2\sqrt{3})\,p^2 - (4 - 2\sqrt{3}) = 0.$$

考えてみよう これは p^2 についての二次方程式であるが、係数が見るからに厄介である。手早く因数分解する方法はないだろうか。

p^2 についての 2 つの解は、和が $3 - 2\sqrt{3}$、積が $-(4 - 2\sqrt{3})$ でなければならない。-1 を試してみよう。このとき他方の解は $4 - 2\sqrt{3}$ となり、実際 $-1 + (4 - 2\sqrt{3}) = 3 - 2\sqrt{3}$ が成り立つ。したがって

$$(p^2 + 1)(p^2 - (4 - 2\sqrt{3})) = 0.$$

p は実数であるから $p^2 \neq -1$ であり、小問 (i) より $p^2 = 4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2$ となる。ゆえに $p = \pm(\sqrt{3} - 1)$、$q = (1 - \sqrt{3})/p = \mp 1$ である。解は

$$p = \sqrt{3} - 1,\ q = -1 \qquad \text{および} \qquad p = 1 - \sqrt{3},\ q = 1.$$

言い換えれば、$(3 - 2\sqrt{3}) + 2(1 - \sqrt{3})\mathrm{i}$ の平方根は $\pm((\sqrt{3} - 1) - \mathrm{i})$ である。検算として、$((\sqrt{3} - 1) - \mathrm{i})^2 = (4 - 2\sqrt{3}) - 1 - 2(\sqrt{3} - 1)\mathrm{i}$ となり、これは求める数である。

小問 (iii)

解の公式（quadratic formula）により（平方完成（completing the square）は $\mathbb{C}$ 上でも同様にできるので、解の公式は複素数係数でも成り立つ）、

$$z = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1 + \mathrm{i})(2\sqrt{3} - 2)}}{2(1 + \mathrm{i})} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - (1 + \mathrm{i})(2\sqrt{3} - 2)}}{1 + \mathrm{i}},$$

ここで $\pm\sqrt{\ }$ は 2 つの複素数の平方根を表す。根号の中の量は

$$1-(2\sqrt{3}-2)-(2\sqrt{3}-2)\mathrm{i}=(3-2\sqrt{3})+2(1-\sqrt{3})\mathrm{i},$$

であり、これはまさに小問 (ii) の数である。その平方根は $\pm((\sqrt{3}-1)-\mathrm{i})$ であるから、

$$z=\frac{1\pm((\sqrt{3}-1)-\mathrm{i})}{1+\mathrm{i}},\quad \text{より}\quad z_1=\frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}},\qquad z_2=\frac{(2-\sqrt{3})+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}.$$

分母と分子に $1-\mathrm{i}$ を掛けると（分母は 2 になる）：

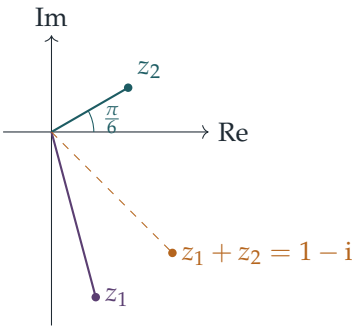
$$z_1=\frac{(\sqrt{3}-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2}=\frac{(\sqrt{3}-1)-(\sqrt{3}+1)\mathrm{i}}{2},$$
$$z_2=\frac{((2-\sqrt{3})+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2}=\frac{(3-\sqrt{3})+(\sqrt{3}-1)\mathrm{i}}{2}.$$

考えてみよう これは「できるだけ簡単な形」になっているだろうか。どちらかの解をさらに整理できないだろうか。

2 つ目の解は因数分解できる：$(3-\sqrt{3})+(\sqrt{3}-1)\mathrm{i}=(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+\mathrm{i})$ であり、$\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}$ である。1 つ目については、$|z_1|^2=\frac{1}{4}((4-2\sqrt{3})+(4+2\sqrt{3}))=2$ であり、$z_1=\frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$ は $2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}$ を $\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ で割った商である。よって解は

$$z_1=\tfrac{1}{2}((\sqrt{3}-1)-(\sqrt{3}+1)\mathrm{i})=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-5\pi\mathrm{i}/12},$$
$$z_2=\tfrac{1}{2}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+\mathrm{i})=(\sqrt{3}-1)\,\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/6}.$$

どちらの形（直交座標形式でも極形式（modulus–argument form）でも）も最終的な答えとして十分である。



検算

- 解と係数の関係：$az^2+bz+c=0$ に対して、$z_1+z_2=-b/a=2/(1+\mathrm{i})=1-\mathrm{i}$ かつ $z_1z_2=c/a=(2\sqrt{3}-2)/(1+\mathrm{i})=(\sqrt{3}-1)(1-\mathrm{i})$ でなければならない。直交座標形式から $z_1+z_2=\frac{1}{2}(2-2\mathrm{i})=1-\mathrm{i}$、極形式から $z_1z_2=\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}=(\sqrt{3}-1)(1-\mathrm{i})$ となる。どちらも一致する。

- 数値的には $z_1 \approx 0.366 - 1.366\mathrm{i}$、$z_2 \approx 0.634 + 0.366\mathrm{i}$ であり、どちらを $(1+\mathrm{i})z^2 - 2z + 2\sqrt{3} - 2$ に代入しても、計算機の精度の範囲で 0 となる。

よくある間違い

- 小問 (i) で、$\sqrt{3}$ の係数を比較してよい**理由**を述べ忘れること。これは r, s が有理数であり、$\sqrt{3}$ が無理数（irrational）であることに基づいている。この条件がなければ、実数解は無数に存在する。
- 小問 (ii) で、$p^2 = -1$ を残してしまうこと、あるいは p と q の符号の組合せを誤ること。$pq = 1 - \sqrt{3} < 0$ であるから、符号は逆でなければならない。
- 小問 (iii) で、公式全体を 2 で割る際に誤ること、あるいは分母を実数化せずに $1+\mathrm{i}$ を分母に残したままにすること。

STEP のその先へ

小問 (i) がうまくいくのは、1 と $\sqrt{3}$ が $\mathbb{Q}$ 上線形独立（linearly independent）であり、$\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{r + s\sqrt{3}\}$ が有理数体上の 2 次元空間のように振る舞うからである。小問 (ii) では、$\mathbb{R}$ 上の 1 と i について同じ考え方を用いている。これは体の拡大（field extension）の出発点であり、大学 1 年次の代数学の講義では、これをガロア理論（Galois theory）へと発展させていく。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）はこの内容を扱っており、Needham の *Visual Complex Analysis*（ヴィジュアル複素解析）は複素数の平方根について美しい幾何学的な見方を与えてくれる。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。