解答例

STEP I 1996、第 4 問

純粋数学 ・ 平方完成による積分

> **STEP I 1996、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q4

鍵となる考え方

分母に 2 次式が現れたら、平方完成（completing the square）をする：$x^2+2ax+1=(x+a)^2+(1-a^2)$。すべては $1-a^2$ の符号で決まる。正ならば「平方の和」となり、逆正接関数（inverse tangent）が現れる。負ならば平方の差となり、部分分数（partial fractions）に分解できて対数が現れる。本当の作業は、そのあと答えを与えられた形に整理することである。

解答

以下、区間 $[0,1]$ 上の積分を I と書く。平方完成すると

$$x^2+2ax+1=(x+a)^2+1-a^2.$$

$|a|<1$ の場合

$b=\sqrt{1-a^2}>0$ とおく。$u=x+a$ として $\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+b^2}=\frac{1}{b}\tan^{-1}\frac{u}{b}$ を用いると

$$I=\frac{1}{b}\left[\tan^{-1}\frac{x+a}{b}\right]_0^1=\frac{1}{b}(\alpha-\beta),\qquad \text{ただし } \alpha=\tan^{-1}\frac{1+a}{b},\quad \beta=\tan^{-1}\frac{a}{b}.$$

（分母は $[0,1]$ 上で常に $b^2>0$ 以上なので 0 にはならず、積分に問題はない。）逆正接をひとつにまとめたいので、$\alpha-\beta$ の正接をとる：

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\dfrac{1+a}{b}-\dfrac{a}{b}}{1+\dfrac{(1+a)a}{b^2}}=\frac{b}{b^2+a+a^2}=\frac{b}{1+a},$$

ここで $b^2+a^2=1$ を用いた。最後に

$$\frac{b}{1+a}=\frac{\sqrt{(1-a)(1+a)}}{1+a}=\sqrt{\frac{1-a}{1+a}},$$

これは $1+a>0$ であるから成り立つ。

考えてみよう $\tan(\alpha-\beta)=t$ から本当に $\alpha-\beta=\tan^{-1}t$ が言えるだろうか？

言えるのは $\alpha-\beta$ が $\tan^{-1}$ の値域 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ に入っているときだけなので、これを確かめなければならない。$(1+a)/b>0$ より $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ であり、また $-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}$ である。さらに $\tan^{-1}$ は増加関数で $(1+a)/b>a/b$ なので $\alpha>\beta$ である。よって $0<\alpha-\beta<\pi$。この区間で tan が正となるのは $(0,\frac{\pi}{2})$ 上だけであり、$\tan(\alpha-\beta)>0$ であったから、$0<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$ となり

$$I=\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\qquad(|a|<1),$$

が示された。

（より鮮やかな見方：$a=\cos\varphi, 0<\varphi<\pi$ とおくと $\alpha=\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}, \beta=\frac{\pi}{2}-\varphi$ となるので $\alpha-\beta=\frac{\varphi}{2}$ であり、実際 $\sqrt{(1-\cos\varphi)/(1+\cos\varphi)}=\tan\frac{\varphi}{2}$ である。）

$|a|>1$ の場合

$c=\sqrt{a^2-1}>0$ とおく。今度は分母が平方の差になる：

$$x^2+2ax+1=(x+a)^2-c^2=(x+a-c)(x+a+c),$$

部分分数に分解すると

$$\frac{1}{(x+a-c)(x+a+c)}=\frac{1}{2c}\left(\frac{1}{x+a-c}-\frac{1}{x+a+c}\right).$$

この 2 次式の根は $-a\pm c$ である。その積は 1、和は $-2a$ である。

まず $a>1$ と仮定する。このとき（$a^2>a^2-1$ より）$a>c$ なので、$x\geq 0$ において $x+a-c$ と $x+a+c$ はともに正である。よって

$$I=\frac{1}{2c}\left[\ln\frac{x+a-c}{x+a+c}\right]_0^1=\frac{1}{2c}\left(\ln\frac{1+a-c}{1+a+c}-\ln\frac{a-c}{a+c}\right).$$

$(a-c)(a+c)=a^2-c^2=1$ を用いると、どちらの分数も簡単になる：

- $(1+a-c)(a+c)=(a+c)+(a-c)(a+c)=1+a+c$ なので $\dfrac{1+a-c}{1+a+c}=\dfrac{1}{a+c}$；
- $a-c=\dfrac{1}{a+c}$ なので $\dfrac{a-c}{a+c}=\dfrac{1}{(a+c)^2}$。

したがって

$$I = \frac{1}{2c}\big(-\ln(a+c) + 2\ln(a+c)\big) = \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}\ln\big(a+\sqrt{a^2-1}\big),$$

ここでは $a+\sqrt{a^2-1} > 0$ でありその絶対値に等しいから、これは問題で述べられた結果である。

では $a < -1$ のときはどうか？ このとき根 $-a \pm c = |a| \pm c$ はともに正で積が 1 なので、小さいほうの根 $|a| - \sqrt{a^2-1}$ は 0 と 1 の間に厳密に含まれる。被積分関数は $[0,1]$ の内部に 1 位の極（simple pole）をもち、根 r の近くでは定数倍の $1/(x-r)$ のように振る舞う。したがって積分は収束（converge）せず、厳密には公式は $a > 1$ に対してのみ成り立つ。（$\ln|\cdot|$ を用いて同じ部分分数の計算をすると、公式が**コーシーの主値**（Cauchy principal value）、すなわち r のまわりの小さな対称な区間を除いた積分の極限を与えることがわかる。問題文の絶対値記号はこれで説明がつく。）

検算

- $a = 0$：積分は $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$ であり、公式は $\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$ を与える。
- $a = 2$：シンプソンの公式（Simpson's rule）は 0.380173 を与え、$\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})$ と一致する。
- $a \to 1$ のとき、2 つの場合はどちらも $\frac{1}{2} = \int_0^1 (1+x)^{-2}\,\mathrm{d}x$ に近づく。後者については c が小さいとき $\ln(a+c) \approx c$ であり、前者については $\tan^{-1} t \approx t$ かつ $\sqrt{(1-a)/(1+a)}/\sqrt{1-a^2} = 1/(1+a)$ である。

よくある間違い

- 差が $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ に入ることを確かめずに $\tan^{-1} A - \tan^{-1} B = \tan^{-1}\frac{A-B}{1+AB}$ と書いてしまう。
- $a < -1$ のとき分母が $[0,1]$ の内部で 0 になることを忘れる。

STEP のその先へ

2 つの答えは、実は a のひとつの関数である。前者で $a = \cos\varphi$、後者で $a = \cosh t$ とおくと $\varphi/(2\sin\varphi)$ と $t/(2\sinh t)$ が得られ、複素数を用いれば（$\cosh t = \cos(\mathrm{i}t)$）一方は他方の解析接続（analytic continuation）になっている。$a < -1$ での発散と主値による救済は、積分路上の極を複素解析（complex analysis）がどう扱うかを初めて垣間

見るものである。これを見るには Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析の入門書）がすばらしい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。