解答例

STEP I 1996、第 2 問

純粋数学 ・ ベータ積分

> **STEP I 1996、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q2

鍵となる考え方

(i) と (ii) の被積分関数（integrand）は、同じ関数を 2 通りに書いたものである：$\alpha x + (1-x) = 1 + (\alpha - 1)x$。したがって、1 つの積分を 2 通りの方法で計算すれば、α の同じ多項式（polynomial）について 2 通りの表示が得られる。小問 (i) からは閉じた形の式が、小問 (ii) からは積分で表された係数が得られ、あとは係数比較（comparing coefficients）をすればよい。部分積分は必要ない。

解答

小問 (i)

$u = 1 + (\alpha - 1)x$ と置換すると $\mathrm{d}u = (\alpha - 1)\,\mathrm{d}x$ であり、$x = 0$ のとき $u = 1$、$x = 1$ のとき $u = \alpha$ である。$\alpha \neq 1$ であるから $\alpha - 1$ で割ってよい：

$$\int_0^1 (1 + (\alpha - 1)x)^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha - 1}\int_1^\alpha u^n \,\mathrm{d}u = \frac{1}{\alpha - 1}\left[\frac{u^{n+1}}{n+1}\right]_1^\alpha = \frac{\alpha^{n+1} - 1}{(n+1)(\alpha - 1)},$$

となり、示すべき式が得られる。（$\alpha < 1$ や $\alpha < 0$ の場合でもこの置換は問題ない。置換は 1 次式であり、$\int_1^\alpha u^n \,\mathrm{d}u$ の公式は積分の上端と下端の大小にかかわらず成り立つからである。同じことだが、$(1 + (\alpha - 1)x)^{n+1}/((n+1)(\alpha - 1))$ を微分して確かめてもよい。）

小問 (ii)

αx と $1-x$ を2つの項とみなして、被積分関数を二項定理（binomial theorem）で展開する：

$$(\alpha x+(1-x))^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\alpha x)^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\alpha^k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

これは有限和であるから項別に積分してよい。x についての積分においては、α は定数である：

$$\int_0^1(\alpha x+(1-x))^n\,\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n}\alpha^k\left[\binom{n}{k}\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\,\mathrm{d}x\right].$$

各括弧の中は α によらない数であるから、これは α についての n 次以下の多項式であり、$0\le k\le n$ に対して α^k の係数は $\binom{n}{k}\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\,\mathrm{d}x$ である。これが示すべきことであった。

小問 (iii)

(ii) の多項式を $P(\alpha)$ と書く。$\alpha x+(1-x)=1+(\alpha-1)x$ であるから、小問 (i) より、$\alpha\neq 1$ であるすべての α に対して

$$P(\alpha)=\frac{\alpha^{n+1}-1}{(n+1)(\alpha-1)}=\frac{1}{n+1}(1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^n),$$

が成り立つ。ここで等比数列の和に関する因数分解 $\alpha^{n+1}-1=(\alpha-1)(1+\alpha+\cdots+\alpha^n)$ を用いた。

考えてみよう この2つの多項式が一致することは、$\alpha\neq 1$ に対してしかわかっていない。それでも係数を比較してよいのはなぜか。

両辺の差は n 次以下の多項式であり、$\alpha\neq 1$ であるすべての α で0になるから、無限に多くの根をもつ。0でない n 次以下の多項式の根は高々 n 個であるから、この差は零多項式であり、すべての係数が一致する。（あるいは、両辺はともに連続であるから、$\alpha=1$ においても一致する、と考えてもよい。）

右辺では、$0\le k\le n$ に対して α^k の係数はすべて $\frac{1}{n+1}$ である。(ii) と比較すると

$$\binom{n}{k}\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1},$$

であり、したがって

$$\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{(n+1)\binom{n}{k}}=\frac{k!\,(n-k)!}{(n+1)\,n!}=\frac{k!\,(n-k)!}{(n+1)!},$$

となる。これが求める結果である。

検算

- $k=0$ のとき：$\int_0^1 (1-x)^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$ であり、公式からも $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$ が得られる。
- $n=2$、$k=1$ のとき：$\int_0^1 (x-x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = \frac{1!\,1!}{3!}$。
- 数値的には $\int_0^1 x^2(1-x)^3\,\mathrm{d}x \approx 0.016667 = \frac{1}{60} = \frac{2!\,3!}{6!}$ である。(i) はランダムに選んだ α と n についてシンプソンの公式（Simpson's rule）で確かめ、(iii) は $0 \le k \le n \le 12$ のすべての場合について厳密に確かめた。
- うれしい帰結として、P の係数はすべて等しいから、$\int_0^1 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\,\mathrm{d}x$ は k によらない。

よくある間違い

- (i) が $\alpha \neq 1$ に対してしか証明されていないことに触れずに係数を比較してしまう。多項式（あるいは連続性）について一言述べれば、この穴はふさがる。
- (ii) で $(1+(\alpha-1)x)^n$ を $(\alpha-1)$ のべきで展開してしまう。これでも正しい多項式は得られるが、α のべきの形にはならない。代わりに $\big(\alpha x + (1-x)\big)^n$ を展開すること。

STEP のその先へ

積分 $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,\mathrm{d}x$ はオイラー（Euler）の**ベータ関数**（beta function）$B(a,b)$ であり、ここで得た結果は $B(a,b) = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$ の整数の場合である。確率の言葉でいえば、p を $[0,1]$ から一様に選び、続いて表の出る確率が p であるコインを n 枚投げるとき、表の枚数が 0 から n までのどの値になることも等しく起こりやすく、それぞれの確率は $\frac{1}{n+1}$ である、ということになる（「係数がすべて等しい」とはまさにこのことである）。これはベイズ（Bayes）自身の有名な論文の出発点である。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論の入門書）では、この背後にあるベータ分布とガンマ分布が展開されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。