解答例

STEP I 1996、第 14 問

確率・統計 ・ 連と条件付き確率

> **STEP I 1996、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q14

鍵となる考え方

現在の連（run）がどのように終わるかで条件を付ける。コインの面が変われば、それ以前に起きたことはすべて無関係になる。古い連は途切れ、新しい連の長さは 1 である。したがって、表が出た後に裏が現れた瞬間、ゲームは「再出発」し、そのときの状態は最初の投げが裏であった場合とまったく同じになる。逆の場合も同様である。こうして、2 つの未知数に関する 2 つの一次方程式が得られる。

解答

$x = \mathrm{P}(A \mid H)$、$y = \mathrm{P}(A \mid T)$ とおく。各投げは常に互いに独立（independent）である。また $r, s \geq 1$ とする。

$\mathrm{P}(A \mid H)$ の方程式

最初の投げが表であったとする。このとき長さ 1 の表の連があり、裏の連はまだ始まっていない。続く $r-1$ 回の投げ（2 回目から r 回目まで）を見る。

- それらがすべて表であれば（その確率は p^{r-1}）、r 回目の投げで長さ r の表の連が完成する。裏は一度も出ていないので、長さ s の裏の連が先に起きることは決してなく、A が起こる。
- そうでなければ（その確率は $1-p^{r-1}$）、表の連が長さ r に達する前に、$2, \ldots, r$ 回目の投げの中で裏が現れる。最初のそのような裏の時点で、表の連は r に達することなく途切れており、それより前に裏は出ていないので、長さ s の裏の連もまだ起きていない。このとき手元にあるのはちょうど長さ 1 の裏の連であり、それより前

のものは今後のどの連にも寄与しない。

> **考えてみよう** その裏以降で A が起こる確率が、なぜちょうど $\mathrm{P}(A \mid T)$ になるのか。

最初の投げが裏であった後の状況は、長さ 1 の裏の連があり、進行中の表の連はなく、今後の投げは過去と独立である、というものである。これはまさに、上の 2 番目の場合における最初の裏の時点での状況と同じである。後の投げは前の投げと独立であり、2 つの連のどちらが先に起きるかは現在の連と今後の投げだけで決まるので、その時点からの A の条件付き確率（conditional probability）は y である。よって、全確率の法則（law of total probability）により

$$\mathrm{P}(A \mid H) = p^{r-1} + \left(1 - p^{r-1}\right)\mathrm{P}(A \mid T),$$

となり、$\alpha = r - 1$ である。

$\mathrm{P}(A \mid T)$ の方程式

最初の投げが裏であったとする。2 回目から s 回目までの投げを見る。

- すべて裏であれば（確率 q^{s-1}）、表が出る前に長さ s の裏の連が完成するので、A は起こらない。
- そうでなければ（確率 $1 - q^{s-1}$）、裏が s 回連続する前に表が現れる。その表の時点では、長さ 1 の表の連があり、進行中の裏の連はない。これは最初の投げが表であった後の状況とまったく同じである。したがって、そこから A が起こる確率は x である。

ゆえに

$$\mathrm{P}(A \mid T) = \left(1 - q^{s-1}\right)\mathrm{P}(A \mid H),$$

となり、$\beta = s - 1$ である。

（端の場合もこれに合う。$r = 1$ のとき、最初の方程式は $x = 1$ を与えるが、1 回の表がすでに長さ r の連であるから正しい。$s = 1$ のとき、2 番目の方程式は $y = 0$ を与える。）

方程式を解く

2 番目の方程式を最初の方程式に代入すると

$$x = p^{r-1} + \left(1 - p^{r-1}\right)\left(1 - q^{s-1}\right)x.$$

ここで

$$1 - \left(1 - p^{r-1}\right)\left(1 - q^{s-1}\right) = p^{r-1} + q^{s-1} - p^{r-1}q^{s-1},$$

であり、これは正である（$q^{s-1}(1-p^{r-1}) \geq 0$ であるから、$0<p<1$ のときこれは $p^{r-1}>0$ 以上である）。したがってこれで割ってよい。$D = p^{r-1}+q^{s-1}-p^{r-1}q^{s-1}$ とおくと

$$\mathrm{P}(A \mid H) = \frac{p^{r-1}}{D}, \qquad \mathrm{P}(A \mid T) = \frac{p^{r-1}\left(1-q^{s-1}\right)}{D}.$$

最後に、$\mathrm{P}(H)=p$、$\mathrm{P}(T)=q$ として全確率の法則を用いると

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A) &= p\,\mathrm{P}(A \mid H) + q\,\mathrm{P}(A \mid T)\\ &= \frac{p^{r-1}\left(p+q-q^{s}\right)}{D}\\ &= \frac{p^{r-1}\left(1-q^{s}\right)}{p^{r-1}+q^{s-1}-p^{r-1}q^{s-1}},\end{aligned}$$

となる。ここで $p+q=1$ を用いた。

検算

- 対称性：公平なコインで $r=s$ ならば、答えは $\frac{1}{2}$ になるはずである。$p=q=\frac{1}{2}$、$r=s=n$ とすると、分子は $2^{1-n}(1-2^{-n})$、分母は $2^{2-n}-2^{2-2n}=2\cdot 2^{1-n}(1-2^{-n})$ であり、$\frac{1}{2}$ が得られる。
- 小さな場合：$r=1$ のとき $\mathrm{P}(A)=1-q^{s}$ となる。これは最初の s 回の投げがすべて裏ではない確率であり、正しい。
- $p=\frac{1}{2}$、$r=3$、$s=2$ のとき、公式から $\mathrm{P}(A \mid H)=\frac{2}{5}$、$\mathrm{P}(A \mid T)=\frac{1}{5}$、$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{10}$ が得られる。これは完全なマルコフ連鎖（Markov chain）を厳密に解くことで確かめ、また 200 000 回のゲームのシミュレーションでは 0.298 となった。

よくある間違い

- p^{r-1} の代わりに p^{r} を用いること。最初の表はすでに与えられているので、必要なのはあと $r-1$ 回だけである。
- $\mathrm{P}(A)$ には最後に p と q による重み付けが必要であることを忘れること。条件付き確率だけでは答えにならない。

STEP のその先へ

この議論はマルコフ連鎖の**第一段階解析**（first-step analysis）である。状態は「現在の面と連の長さ」であり、再出発の性質はマルコフ性（Markov property）にほかならな

い。同じ方法で、表と裏のどんなパターンについても吸収確率（absorption probability）や期待待ち時間（expected waiting time）を求めることができ、さらに Penney のゲーム（Penney's game）へとつながる。このゲームでは、意外なことに、あるパターンが別のパターンに勝つ。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、マルコフ連鎖と第一段階解析をちょうどよい水準で扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。