解答例

# STEP I 1996、第 13 問

確率・統計 ・ 離散分布と期待値

**STEP I 1996、問 13**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/96-s1-q13

この問題は、*Beyond STEP* の第 12.11 節「切手、カップ、そして $e$」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/stamps-and-e.html

## 鍵となる考え方

このゲームは最初に予想を外した時点で終わるので、$N = k$ とは「カップが $2, 3, \ldots, k-1$ 個のときにはすべて当て、$k$ 個のときに外す」ということである。これらの確率を掛け合わせると分母に階乗（factorial）が現れる。和の中に階乗があれば、指数関数の級数（exponential series）$e^x = \sum x^n/n!$ が登場する強い兆候である。期待値（expectation）を求める際のコツは、$k$ の因数を $k!$ と約分して、各和を $\sum 1/n!$ の添字をずらしたものにすることである。

## 解答

### $N$ の分布（distribution）

$c$ 個のカップがかき混ぜられると、ジムは実質的に無作為に予想することになるので、当たる確率は $1/c$、外れる確率は $1 - 1/c$ である。各回で新たにかき混ぜるので、各回の試行は独立（independent）である。

カップは常に少なくとも 2 個あるので、$N \geq 2$ である。$k \geq 2$ に対して、事象 $N = k$ が起こるのは、ジムがカップ $2, 3, \ldots, k-1$ 個のときに正しく予想し、$k$ 個のときに外

す場合であり、かつその場合に限る。独立性より、

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(N=k) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdots\frac{1}{k-1}\cdot\left(1-\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{(k-1)!}\cdot\frac{k-1}{k}\\ &= \frac{k-1}{k!}, \qquad k=2,3,4,\ldots\end{aligned}$$

（$k=2$ のときは正解の確率の積は空積であり、当然そうあるべきように $\frac{1}{2}$ が得られる。）

これと同値な簡潔な形にも注目しておく価値がある。$N>k$ とは、ジムがカップ $2,\ldots,k$ 個のときにすべて当てたということなので、

$$\mathrm{P}(N>k) = \frac{1}{k!} \qquad (k\geq 1).$$

実際 $\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}=\frac{k-1}{k!}$ であり、上の公式と一致する。$k\to\infty$ のときこれは 0 に収束するので、ゲームは確率 1 で終了し、確率の総和は 1 になる。

### 期待値

$k$ を $k!$ と約分すると、

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(N) &= \sum_{k=2}^{\infty} k\cdot\frac{k-1}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{k(k-1)}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-2)!}\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!} = \mathrm{e},\end{aligned}$$

ここで $j=k-2$ とおき、$\mathrm{e}^x=\sum_{j\geq 0}x^j/j!$ に $x=1$ を代入した。これが求める結果である。

### 分散（variance）

> **考えてみよう** ここで和を計算しやすい二次モーメント（second moment）はどちらか。$\mathrm{E}(N^2)$ か、それとも $\mathrm{E}\big(N(N-1)\big)$ か。

どちらでもうまくいく。$k^2\,\mathrm{P}(N=k)=k\cdot\frac{k(k-1)}{k!}$ の因数 $k(k-1)$ がすでにきれいに約分できるからである。計算すると

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(N^2) &= \sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^2(k-1)}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{k}{(k-2)!} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{j+2}{j!}\\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(j-1)!} + 2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!} = \mathrm{e}+2\mathrm{e} = 3\mathrm{e},\end{aligned}$$

となる。途中の段階では、$\sum j/j!$ の $j=0$ の項は 0 であり、$j \geq 1$ に対して $j/j! = 1/(j-1)!$ であることを用いた。したがって

$$\mathrm{Var}(N) = \mathrm{E}(N^2) - \big(\mathrm{E}(N)\big)^2 = 3\mathrm{e} - \mathrm{e}^2 = \mathrm{e}(3-\mathrm{e}) \approx 0.766.$$

## 検算

- 確率 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{8}, \frac{1}{30}, \ldots$ の総和は 1 になる。これは裾の形 $\mathrm{P}(N > k) = 1/k!$ からわかる。
- 裾の公式を用いると $\mathrm{E}(N) = \sum_{k\geq 0} \mathrm{P}(N > k) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = \mathrm{e}$ となり、同じ答えに独立な経路で到達できる。
- $\mathrm{e} < 3$ なので、分散は当然そうあるべきように正である。厳密な和からは $\mathrm{E}(N) = 2.71828\ldots$、$\mathrm{Var}(N) = 0.76579\ldots$ が得られ、400 000 回のゲームのシミュレーションでは平均 2.720、分散 0.767 が得られた。

## よくある間違い

- 分布を $k = 1$ から始めてしまう。最初からカップは 2 個あるので、$N \geq 2$ である。
- 外れた予想に対応する最後の因数 $1 - \frac{1}{k}$ を忘れて $1/(k-1)!$ としてしまう。この「確率」の総和は 1 ではなく $\mathrm{e} - 1$ になる。
- $\big(\mathrm{E}(N)\big)^2$ を引くべきところを、$\mathrm{Var}(N) = \mathrm{E}(N^2) - \mathrm{E}(N)$ と書いてしまう。

## STEP のその先へ

裾の和の公式 $\mathrm{E}(N) = \sum_{k\geq 0} \mathrm{P}(N > k)$ は、$\{0, 1, 2, \ldots\}$ に値をとる任意の確率変数に対して成り立ち、大学 1 年で学ぶ標準的な道具である。今回のように、面倒な期待値の計算を 1 行の計算に変えてくれることが多い。すべてのモーメントをよりすっきりとまとめる方法として、確率母関数（probability generating function）$G(s) = \mathrm{E}(s^N)$ がある。この問題では $G(s) = 1 + (s-1)\mathrm{e}^s$ となり、$G'(1) = \mathrm{e}$ と $G''(1) = 2\mathrm{e}$ から平均と分散がただちに得られる。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、まさにこの精神で母関数を展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。