解答例

STEP I 1996、第 11 問

力学 ・ 放物運動

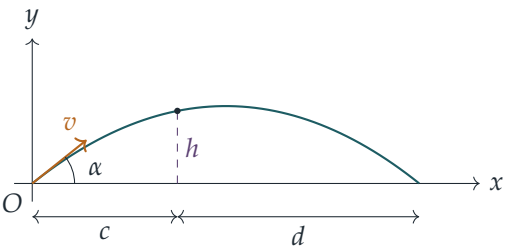
> **STEP I 1996、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q11

鍵となる考え方

投射体（projectile）の経路は放物線（parabola）であり、それが地面と交わる 2 点 $x = 0$ と $x = c + d$ はどちらもわかっている。2 次式は根（roots）によって定数倍を除いて決まるので、軌道（trajectory）はある k を用いて $y = kx(c + d - x)$ と書けるはずである。点 (c, h) によって k が定まり、標準的な軌道の方程式と比較することで、k を $\tan\alpha$ に、さらに v^2 に書き換えることができる。

解答

粒子を重力のみを受けて自由に運動する質点（point mass）としてモデル化し（空気抵抗（air resistance）は無視する）、O を原点とし、x 軸を運動の向きに水平にとり、y 軸を鉛直上向きにとる。射程（range）を $R = c + d$ とおき、$T = \tan\alpha$ とおく。



投射角

初速度の成分を $v\cos\alpha$ と $v\sin\alpha$ とすると、時刻 t における位置は $x = vt\cos\alpha$, $y = vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$ である。$t = x/(v\cos\alpha)$ を代入して t を消去すると、軌道

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\alpha}.$$

が得られる。粒子は $x = R$ で着地するので、そこで $y = 0$ である。$R \neq 0$ であるから R で割ってよく、

$$\frac{g}{2v^2\cos^2\alpha} = \frac{\tan\alpha}{R}. \qquad (*)$$

これを軌道の式に代入し直すと、

$$y = Tx - \frac{Tx^2}{R} = \frac{Tx(R-x)}{R}.$$

考えてみよう 点 (c,h) を使う前に $g/(2v^2\cos^2\alpha)$ を置き換えておく価値があるのはなぜか。

$(*)$ によって v が完全に消え、未知数が T ただ 1 つの方程式になるからである。幾何学的には、根 0 と R が見える因数分解された形で放物線を書いたことになる。さて、点 (c,h) は経路上にあり、$R - c = d$ であるから、

$$h = \frac{Tcd}{c+d}, \qquad \text{すなわち、} \qquad \tan\alpha = \frac{h(c+d)}{cd},$$

となり、示すべき式が得られた。

初速の大きさ

$(*)$ を変形し、$\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$ を用いると、

$$v^2 = \frac{gR}{2T\cos^2\alpha} = \frac{gR(1+T^2)}{2T} = \frac{g}{2}\left(\frac{R}{T} + RT\right).$$

最初の結果から、$\frac{R}{T} = \frac{cd}{h}$ かつ $RT = \frac{(c+d)^2h}{cd}$ である。したがって

$$v^2 = \frac{g}{2}\left(\frac{cd}{h} + \frac{(c+d)^2h}{cd}\right),$$

となり、問題は解決した。

検算

- 相加・相乗平均の不等式（AM–GM inequality）により $\frac{R}{T} + RT \geq 2R$ であるから $v^2 \geq gR$ であり、等号が成り立つのはちょうど $T = 1$ のときである。これは、与え

られた速さに対する最大射程が v^2/g であり、それが 45° で達成されるというおなじみの事実である。

- 点 (c, h) が飛行の最高点であれば、$c = d$ かつ $\tan\alpha = 2h/c$ となり、最高点の高さは射程と $\tan\alpha$ の積の 4 分の 1 であるという標準的な結果と一致する。
- 数値的には、$g = 9.81$, $c = 3$, $d = 5$, $h = 2$ とすると、公式から $\tan\alpha = \frac{16}{15}$ と $v^2 \approx 78.64$ が得られる。小さな時間刻みで運動を逐次計算すると、粒子は $x = 3$ で高さ 2.000 を通過し、$x = 8.000$ で着地する。

よくある間違い

- 軌道の方程式の $\cos^2\alpha$ を忘れる、あるいは $\sec^2\alpha$ を $1 + \tan^2\alpha$ ではなく $1 + \tan\alpha$ で置き換えてしまう。
- 「$x = c$ で高さ h」と「$x = c + d$ で高さ 0」という 2 つの方程式を、v と α について直接解こうとする。この方法でも解けるが、先に $(*)$ を使って v を消去するよりも計算がはるかに重くなる。

STEP のその先へ

2 次式をその根を用いて書くという工夫は、ある大きな考え方の小さな例である。すなわち、多項式はその零点によって定数倍を除いて決まるという考え方であり、これは補間（interpolation）や、複素数の範囲での因数定理（factor theorem）へとつながっていく。力学では、v を固定して α を変化させると放物線の族が得られ、その包絡線（envelope）は「安全放物線（parabola of safety）」と呼ばれ、投射体が到達しうるすべての点の境界となる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、投射体の運動とその発展（空気抵抗を含む）を大学 1 年生の水準で扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。