解答例

STEP I 1996、第 10 問

力学 ・ 運動量保存則

> **STEP I 1996、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q10

鍵となる考え方

使うべき保存則は二つある。運動量は保存される（爆発前は 0 であった）こと、そして爆発後の運動エネルギーが E であることである。質量の分け方がわかれば、この二つから両方の速さが決まるので、相対速度（relative speed）は質量の分け方の関数となる。したがって、それを最小化する問題はただ一つの不等式に帰着し、$m_1 + m_2$ が一定であることから、相加平均・相乗平均の不等式（AM–GM inequality）が自然な道具となる。

解答

二つの部分を質点としてモデル化し、爆発で質量は失われない、すなわち $m_1 + m_2 = M$ であると仮定する。また、爆発の間に外力ははたらかないと仮定する。



運動量。 宇宙船ははじめ静止しているので、全運動量は爆発前に 0 であり、したがって爆発後も 0 である。二つの運動量 $m_1\mathbf{v}_1$ と $m_2\mathbf{v}_2$ は打ち消し合わなければならないから、二つの部分は一直線上をちょうど逆向きに運動し、

$$m_1 v_1 = m_2 v_2 = p,$$

とおける。ここで $p > 0$ は共通の運動量の大きさである。二つの部分は逆向きに運動するので、その相対速度は確かに $v_1 + v_2$ である。

エネルギー。 爆発後の運動エネルギーはすべて爆発によって生じたものであるから、

$$E = \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{p^2}{2m_1} + \frac{p^2}{2m_2} = \frac{p^2(m_1+m_2)}{2m_1m_2} = \frac{p^2M}{2m_1m_2}.$$

よって $p^2 = \dfrac{2Em_1m_2}{M}$ である。

相対速度。 $v_1 = p/m_1$ と $v_2 = p/m_2$ を用いると、

$$v_1 + v_2 = p\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = \frac{pM}{m_1m_2},$$

であるから、

$$(v_1+v_2)^2 = \frac{p^2M^2}{m_1^2m_2^2} = \frac{2Em_1m_2}{M}\cdot\frac{M^2}{m_1^2m_2^2} = \frac{2EM}{m_1m_2}.$$

考えてみよう E と M は一定である。自由に変えられるものとして残っているのは何か。また、それをどちらの向きに動かしたいか。

変えられるのは質量の分け方だけであり、$v_1 + v_2$ をできるだけ小さくするには、$m_1 + m_2 = M$ という条件のもとで積 m_1m_2 をできるだけ大きくすればよい。相加平均・相乗平均の不等式より（どちらの質量も正である）、

$$m_1m_2 \le \left(\frac{m_1+m_2}{2}\right)^2 = \frac{M^2}{4},$$

であり、等号が成り立つのは $m_1 = m_2 = \frac{1}{2}M$ のときに限る。（同値な言い方をすれば、$m_1m_2 = \frac{1}{4}M^2 - \frac{1}{4}(m_1-m_2)^2$ である。）したがって

$$(v_1+v_2)^2 = \frac{2EM}{m_1m_2} \ge \frac{2EM}{M^2/4} = \frac{8E}{M},$$

であり、速さは負でないから平方根をとってよい。

$$v_1 + v_2 \ge \left(\frac{8E}{M}\right)^{1/2}.$$

この下界は、宇宙船が等しい二つの半分に分かれ、それぞれが速さ $\sqrt{2E/M}$ で運動するときに達成される。よって、相対速度の最小値は $(8E/M)^{1/2}$ であり、これが示すべきことであった。

検算

- 等しく二分した場合：それぞれの運動エネルギーは $\frac{1}{2}E = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}Mv^2$ であるから、$v = \sqrt{2E/M}$ かつ $2v = \sqrt{8E/M}$ となり、下界と一致する。
- 極端な分け方：$m_1 \to 0$ のとき $m_1 m_2 \to 0$ となり、相対速度は限りなく大きくなる。エネルギーの一部を担うごく小さな破片は非常に速く動かなければならないので、これは理にかなっている。
- 単位：E/M の単位は $\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-2}$ であるから、その平方根は速さである。
- 数値的に、$M = 7$、$E = 3$ として m_1 を $(0,7)$ の範囲で走らせると、相対速度の最小値は $m_1 = 3.5$ のときの $1.85164\ldots$ となり、$\sqrt{24/7} = 1.85164\ldots$ と一致する。

よくある間違い

- 二つの部分がなぜ逆向きに運動するのかを述べ忘れること。相対速度が $|v_1 - v_2|$ ではなく $v_1 + v_2$ になるのは、まさにこのためである。
- $m_1 + m_2 = M$ を用いずに m_1 について最小化しようとすること。この制約条件があるからこそ、問題は一次元になる。
- $(8E/M)^{1/2}$ が下界であることだけを示し、それが実際に（$m_1 = m_2$ のとき）達成されることに触れないこと。

STEP のその先へ

これは重心系（centre-of-mass frame）で考える方法の最も簡単な例である。重心系では、二体への分裂は常に大きさが等しく向きが逆の運動量を生み、運動エネルギーは $p^2/(2\mu)$ となる。ここで $\mu = m_1 m_2/M$ は**換算質量**（reduced mass）である。いまの場合 $(v_1+v_2)^2 = 2E/\mu$ であり、換算質量は二つの質量が等しいときに最大となる。同じ考え方は原子核の崩壊や二体の軌道運動の根底にもある。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、これが丁寧に展開されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。