解答例

STEP I 1996、第 1 問

純粋数学 ・ 円柱の最適化

> **STEP I 1996、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q1

鍵となる考え方

缶は半径 r と高さ h の 2 つの量で決まる。体積の制約（constraint）を使えばそのうち一方を消去でき、S は r だけの関数となるので、通常の微分（differentiation）によって最小化できる。最適な缶は非常に整った形をしていることがわかる。その形がわかれば、球に関する 2 つの問いはどちらも、軸を含む 1 つの断面を見ることに帰着する。

解答

表面積の最小化

缶の半径を $r > 0$、高さを $h > 0$ とする。このとき

$$V = \pi r^2 h, \qquad S = 2\pi r^2 + 2\pi r h,$$

ここで $2\pi r^2$ は両端の 2 つの円の面積、$2\pi rh$ は側面（曲面）の面積である。V を固定すると $h = V/(\pi r^2)$ であるから、$2\pi rh = 2V/r$ となり、

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}, \qquad r > 0.$$

微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{2(2\pi r^3 - V)}{r^2}.$$

これは $r^3 < V/(2\pi)$ のとき負、$r^3 > V/(2\pi)$ のとき正である。よって S は減少したのち増加し、$r > 0$ における最小値をとるのは

$$r^3 = \frac{V}{2\pi}.$$

のときである。これは局所的な最小（極小）であるだけでなく、大域的最小値（global minimum）である。唯一の停留点（stationary point）であり、そこで導関数の符号が $-$ から $+$ に変わるからである。（式からも分かる：$r \to 0^+$ のときも $r \to \infty$ のときも $S \to \infty$ となる。）

この半径では $V = 2\pi r^3$ であるから

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = 2r.$$

最適な缶は、高さと幅（直径）がちょうど等しい。このとき $2V/r = 4\pi r^2$ であるから

$$\begin{aligned} S &= 2\pi r^2 + 4\pi r^2 = 6\pi r^2 = 6\pi \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{2/3} \\ &= 3 \cdot 2\pi \cdot (2\pi)^{-2/3} V^{2/3} = 3\,(2\pi)^{1/3} V^{2/3} = 3\,(2\pi V^2)^{1/3}, \end{aligned}$$

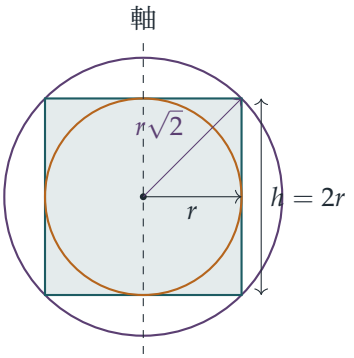
となり、これが求める最小値である。

考えてみよう なぜ h ではなく r で考えるのか？

どちらの変数でもよい。ただし h を消去するほうが簡単である。h はどちらの式にも 1 次でしか現れないので、代入 $h = V/(\pi r^2)$ によって r の簡単な関数が得られるからである。r を消去すると $\sqrt{V/(\pi h)}$ が現れ、計算が煩雑になる。

缶の内部に入る最大の球

以下、缶は $h = 2r$ を満たすとする。軸を含む平面で切ると、断面は $2r \times 2r$ の正方形となる。



缶の内部にある任意の球は半径 $\rho \le r$ をもつ。これを見るには、球を底面の平面に射影すればよい。すると、半径 r の底面の円板の内部にある半径 ρ の円板が得られる。また $2\rho \le h = 2r$ からも同じ評価が得られる。缶の中心を中心とする半径 r の球（断面

図の琥珀色の円）は両端と側面に接するので、缶に収まる。したがって $r^3 = V/(2\pi)$ を用いると、最大の球の体積は

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3 = \tfrac{4}{3}\pi \cdot \frac{V}{2\pi} = \tfrac{2}{3}V,$$

となり、題意が示された。

缶を含む最小の球

上端の縁上の点と、下端の縁上でそれと直径方向に反対側にある点をとる。これらは正方形の断面の対角にある頂点であるから、その距離は

$$\sqrt{(2r)^2 + h^2} = \sqrt{8r^2} = 2\sqrt{2}\,r.$$

である。缶を含むどの球もこの 2 点を含むので、その直径は $2\sqrt{2}\,r$ 以上、半径は $\sqrt{2}\,r$ 以上である。

> **考えてみよう** 半径 $\sqrt{2}\,r$ の球で実際に十分な大きさであることは、どうすればわかるか？

球の中心を缶の中心 O にとる。缶の任意の点は、軸からの距離が $\rho \le r$ であり、O からの上下方向の高さ z は $|z| \le r$ を満たす。したがって、その点の O からの距離は $\sqrt{\rho^2 + z^2} \le \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2}\,r$ である。よって缶全体がこの球の内部にある（紫色の円は正方形の 4 つの頂点すべてを通る）。

したがって、缶が収まる最小の球の半径は $\sqrt{2}\,r$、体積は

$$\tfrac{4}{3}\pi\left(\sqrt{2}\,r\right)^3 = \tfrac{4}{3}\pi \cdot 2\sqrt{2}\,r^3 = \tfrac{8\sqrt{2}}{3}\pi \cdot \frac{V}{2\pi} = \frac{4\sqrt{2}}{3}\,V.$$

である。

検算

- $V = 1$ のとき、r の細かい格子上で $2\pi r^2 + 2/r$ を総当たりで最小化すると $S \approx 5.5358$ となり、$3(2\pi)^{1/3} \approx 5.5358$ と一致する。
- 2 つの球の体積比は、半径の比の 3 乗である $(\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$ になるはずである。実際 $\frac{4\sqrt{2}}{3}V \big/ \frac{2}{3}V = 2\sqrt{2}$ である。
- 大小関係も妥当である：$\frac{2}{3}V < V < \frac{4\sqrt{2}}{3}V \approx 1.886\,V$ であるから、内側の球は缶より小さく、外側の球は缶より大きい。

よくある間違い

- 一方または両方の端を忘れ、$S = \pi r^2 + 2\pi rh$ や $S = 2\pi rh$ と書いてしまう。これでは最適な形が変わってしまう。
- $\mathrm{d}S/\mathrm{d}r = 0$ を示しただけで、その停留点がなぜ最小となるのかを述べない。
- 外側の球の半径を、缶の空間対角線の半分ではなく、r や h としてしまう。

STEP のその先へ

これは制約付き最適化（constrained optimisation）である：$V(r,h)$ を一定に保つという条件のもとで $S(r,h)$ を最小化する。大学では、変数を消去せずにこれを扱うラグランジュ（Lagrange）の未定乗数法（Lagrange multipliers）を学ぶ。条件 $\nabla S = \lambda \nabla V$ からほぼ直ちに $h = 2r$ が得られる。また 2 つの球は、凸体（convex body）の「内接」球と「外接」球の例にもなっており、これらは凸幾何学において中心的な役割を果たす。この種の問題をさらに解きたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）を参照されたい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。