解答例

STEP III 1995、第 9 問

力学 ・ 実体振り子

STEP III 1995、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

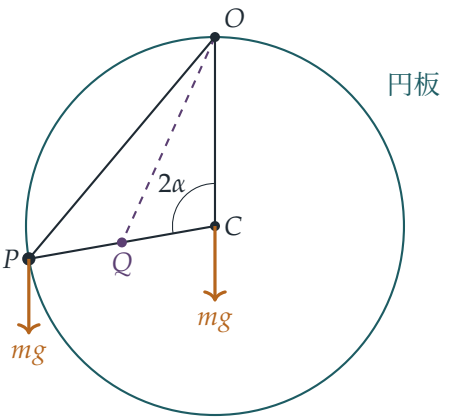
step.maths.org/questions/95-s3-q9

鍵となる考え方

円板と質点は同じ質量をもつので、系全体の重心（centre of mass）は CP の中点 Q である。ほとんどすべてがこの事実から導かれる。安定な平衡（stable equilibrium）では Q が O の真下にあり、小問 (iii) のエネルギーの式に必要なのも Q の高さだけである。残りは二等辺三角形（isosceles triangle）OCP の幾何と、慣性モーメント（moment of inertia）を求める標準的な積分である。

解答

円板を剛体薄板（rigid lamina）、P をその縁に固定された質点とみなす。軸はなめらかなので、力学的エネルギー（mechanical energy）は保存される。以下を通して $OC = CP = r$、$\angle OCP = 2\alpha$ とする。



小問 (i)

円板（重心 C）と質点（位置 P）はどちらも質量 m なので、系の重心は CP の中点 Q である。はたらく力は重力と軸からの抗力だけなので、系が平衡にあるのはちょうど Q が O と同じ鉛直線上にあるときであり、Q が O の下にあるとき平衡は安定である（このとき、どのような変位も Q を持ち上げ、位置エネルギー（potential energy）を増加させる）。したがって安定な平衡では OQ は鉛直であり、β は角 $\angle COQ$ である。

円板の面内に、C を原点とし O が $(r,0)$ となる座標軸をとる。すると $P = r(\cos 2\alpha, \sin 2\alpha)$、$Q = \frac{r}{2}(\cos 2\alpha, \sin 2\alpha)$ である。よって

$$\overrightarrow{OC} = (-r,\, 0), \qquad \overrightarrow{OQ} = \tfrac{r}{2}(-(2-\cos 2\alpha),\, \sin 2\alpha).$$

$2 - \cos 2\alpha > 0$ であるから、ベクトル $\overrightarrow{OQ}$ は $\overrightarrow{OC}$ 方向に正の成分 $\frac{r}{2}(2-\cos 2\alpha)$ をもち、それに垂直な方向に成分 $\frac{r}{2}\sin 2\alpha$ をもつ。ゆえに β は鋭角であり、

$$\tan\beta = \frac{\frac{r}{2}\sin 2\alpha}{\frac{r}{2}(2-\cos 2\alpha)} = \frac{\sin 2\alpha}{2-\cos 2\alpha},$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

$\rho x/r$ を単位面積あたりの質量とする。半径 x と $x + \mathrm{d}x$ の間の円環の面積は $2\pi x\,\mathrm{d}x$ であるから、

$$m = \int_0^r \frac{\rho x}{r}\, 2\pi x\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi\rho r^2}{3}.$$

この円環上のすべての点は、C を通り円板に垂直な軸から距離 x にあるので、この軸のまわりの慣性モーメントは

$$I_C = \int_0^r \frac{\rho x}{r}\, 2\pi x \cdot x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi\rho r^4}{5} = \frac{3}{5}mr^2,$$

となる。ここで $2\pi\rho r^2 = 3m$ を用いた。O を通る軸はこの軸と平行であり（どちらも円板を含む鉛直面に垂直である）、距離 $OC = r$ だけ離れているので、平行軸の定理（parallel axis theorem）により

$$I_O = \frac{3}{5}mr^2 + mr^2 = \frac{8}{5}mr^2.$$

小問 (iii)

系の慣性モーメント。三角形 OCP は頂角 2α の二等辺三角形なので、弦の長さは $OP = 2r\sin\alpha$ である。質点の寄与は $m(2r\sin\alpha)^2$ であり、

$$I = \frac{8}{5}mr^2 + 4mr^2\sin^2\alpha = \frac{4}{5}mr^2\,(2 + 5\sin^2\alpha).$$

重心の下降量。放した瞬間には OQ は水平なので、Q は O と同じ高さにある。最終的な位置では P が O の真下にあるので OP は鉛直であり、任意の点の O からの深さは、その点の OP 方向に沿った O からの距離である。

- P の深さは $OP = 2r\sin\alpha$ である。
- 三角形 OCP の底角は $\frac{1}{2}(\pi - 2\alpha) = \frac{\pi}{2} - \alpha$ なので、$\angle COP = \frac{\pi}{2} - \alpha$ であり、C の深さは $r\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = r\sin\alpha$ である。

Q は CP の中点なので、その深さは両者の平均 $\frac{3}{2}r\sin\alpha$ である。したがって系（全質量 $2m$）が失った位置エネルギーは $2mg \cdot \frac{3}{2}r\sin\alpha = 3mgr\sin\alpha$ である。

考えてみよう 系は本当に P が O の真下にくる位置まで到達するだろうか？

Q が O と同じ高さにある状態から静かに放すと、系は実体振り子（compound pendulum）として、OQ が水平となる二つの位置の間を振動し、その途中で Q が O より低くなるすべての位置を通過する。最終的な位置では Q の深さは $\frac{3}{2}r\sin\alpha > 0$ なので、この位置には到達する（そして、C が最初 P より低い位置にあるという条件は、振れる向きを決めているにすぎない）。

エネルギー。静止状態から出発し、角速度（angular speed）を ω とすると、

$$\tfrac{1}{2}I\omega^2 = 3mgr\sin\alpha \quad\Longrightarrow\quad \omega^2 = \frac{6gr\sin\alpha}{\frac{4}{5}r^2(2+5\sin^2\alpha)} = \frac{15g\sin\alpha}{2r(2+5\sin^2\alpha)}.$$

C は O を中心とする半径 $OC = r$ の円周上を動くので、$v = r\omega$ であり、

$$v^2 = \frac{15gr\sin\alpha}{2(2+5\sin^2\alpha)},$$

となり、示すべき式が得られた。

最大値。$s = \sin\alpha$ とおく。$0 < \alpha \le \pi/2$ より $s \in (0,1]$ である。$f(s) = \dfrac{s}{2+5s^2}$ とおくと、

$$f'(s) = \frac{(2+5s^2) - 10s^2}{(2+5s^2)^2} = \frac{2-5s^2}{(2+5s^2)^2},$$

これは $s < \sqrt{2/5}$ で正、$s > \sqrt{2/5}$ で負である。$\sqrt{2/5} < 1$ は許される範囲に含まれるので、f はそこで最大値 $f = \dfrac{\sqrt{2/5}}{4} = \dfrac{\sqrt{10}}{20}$ をとる。よって

$$v_{\max}^2 = \frac{15gr}{2}\cdot\frac{\sqrt{10}}{20} = \frac{3\sqrt{10}}{8}gr \approx 1.19\,gr, \qquad \text{最大となるのは} \sin\alpha = \sqrt{2/5}.$$

検算

- $\alpha \to 0$ のとき、P は O の位置にきて、円板だけが OC を鉛直にしてつり下がる。実際 $\tan\beta \to 0$ となる。$\alpha = \pi/2$ のとき、P は O と直径の反対側にあり、Q は OC 上

にあるので、やはり $\beta = 0$ である。

- $\alpha = \pi/2$ のとき：$I = \frac{28}{5}mr^2$、質量 $2m$ に対して下降量は $\frac{3}{2}r$ なので、$v^2 = r^2 \cdot 3mgr \cdot \frac{10}{28mr^2} = \frac{15}{14}gr$ となり、公式と一致する。
- いくつかの α について、放した位置から運動方程式（equation of motion）を数値的に（RK4 で）積分した。たとえば $\alpha = 0.7$、$r = 1.3$、$g = 9.81$ のとき、シミュレーションは $v^2 = 15.1206$ を与え、公式と有効数字 6 桁まで一致する。また直接探索によっても、最大値 $3\sqrt{10}/8 \approx 1.1859$（$gr$ を単位とする）が確かめられる。

よくある間違い

- I_C に一様な円板の値 $\frac{1}{2}mr^2$ を使ってしまう。ここでは密度が外側ほど大きいので、I_C は $\frac{3}{5}mr^2$ に増加する。
- 小問 (iii) で、慣性モーメントへの質点の寄与 $m \cdot OP^2$ を忘れる。
- v^2 の代わりに ω^2 を答えてしまう。問われているのは C の速さであり、それは $r\omega$ である。

STEP のその先へ

水平な軸のまわりに回転できるように支えられた剛体は**実体振り子**である。これは、おもりが重心にある単振り子のようにふるまうが、慣性として Md^2 の代わりに I をもつ。小問 (i) の平衡のまわりの微小振動の周期は $2\pi\sqrt{I/(Mgd)}$（ただし $d = OQ$）であり、「相当単振り子」の長さ $I/(Md)$ はケーター（Kater）の可逆振り子（reversible pendulum）につながる。これはかつて g を精密に測定するために用いられた。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体の回転と平行軸の定理をこうした精神で扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。