解答例

STEP III 1995、第 8 問

純粋数学 ・ 平面と球

> **STEP III 1995、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q8

鍵となる考え方

平面が球を切るとき、切り口の円の中心は、球の中心から平面に下ろした垂線の足（foot of the perpendicular）である。したがって球の中心は、**それぞれの**円の中心を通る法線（normal）上になければならず、各法線に沿った距離は、ピタゴラス（Pythagoras）の定理によって球の半径と結びつく。この問題の残りの部分はすべて、この一つのベクトル方程式と、うまく選んだベクトルとの内積（dot product）をとるだけのことである。

解答

法線と距離

X を通る π の法線は、$\mathbf{x}$ を通り方向が $\mathbf{n}$ の直線

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} + t\,\mathbf{n}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

である。これが π と交わるのは $(\mathbf{x}+t\mathbf{n})\cdot\mathbf{n} = p$ となるとき、すなわち（$\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 1$ であるから）$t = p - \mathbf{x}\cdot\mathbf{n}$ のときである。よって垂線の足は $\mathbf{x} + (p - \mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$ であり、$\mathbf{n}$ は単位ベクトル（unit vector）であるから、X と π の距離は

$$|\mathbf{x}\cdot\mathbf{n} - p|.$$

である。

両方の円を通る球

中心 $\mathbf{c}$、半径 R の球が両方の円を含むと仮定する。i を固定する。C_i 上のすべての点 $\mathbf{y}$ は $|\mathbf{y}-\mathbf{r}_i| = 1$ かつ $(\mathbf{y}-\mathbf{r}_i)\cdot\mathbf{n}_i = 0$ を満たす。$\mathbf{y}$ が C_i を一周するとき、ベクトル $\mathbf{u} = \mathbf{y}-\mathbf{r}_i$ は $\mathbf{n}_i$ に垂直なすべての単位ベクトルをとる。

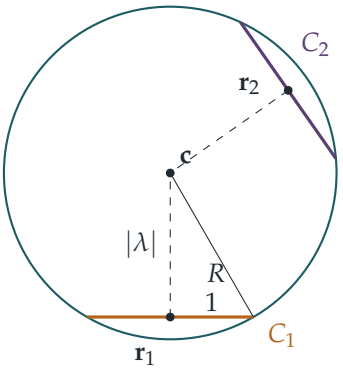
$\mathbf{a} \perp \mathbf{n}_i$ として $\mathbf{c}-\mathbf{r}_i = \mathbf{a}+\mu_i\mathbf{n}_i$ と分解する。すると

$$\begin{aligned} R^2 = |\mathbf{y}-\mathbf{c}|^2 &= |\mathbf{u}-\mathbf{a}-\mu_i\mathbf{n}_i|^2 \\ &= 1 - 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{a} + |\mathbf{a}|^2 + \mu_i^2, \end{aligned}$$

となる。ここで $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}_i = \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}_i = 0$ を用いた。左辺は C_i のどの点についても同じであるから、$\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}$ は許されるすべての $\mathbf{u}$ に対して同じ値をとる。ところが $\mathbf{u}$ が許されるなら $-\mathbf{u}$ も許されるので、平面内のすべての単位ベクトル $\mathbf{u}$ に対して $\mathbf{u}\cdot\mathbf{a} = -\mathbf{u}\cdot\mathbf{a} = 0$ となり、（$\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ ならば）$\mathbf{u}$ を $\mathbf{a}$ に平行に選ぶと矛盾が生じる。よって $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ であり、

$$\mathbf{c} = \mathbf{r}_i + \mu_i\mathbf{n}_i, \qquad R^2 = 1 + \mu_i^2.$$

言葉で言えば、球の中心は C_i の中心を通る π_i の法線上にある。これはまさに最初の部分で求めた直線である。



これを $i = 1$ と $i = 2$ に適用すると $1+\mu_1^2 = R^2 = 1+\mu_2^2$ となるので、$\mu_2 = \pm\mu_1$ である。$\lambda = \mu_1$ とおくと

$$\mathbf{r}_1 + \lambda\mathbf{n}_1 = \mathbf{c} = \mathbf{r}_2 \pm \lambda\mathbf{n}_2,$$

となり、条件を満たす球が存在するときには、このような λ が必ず存在する。これが示すべきことであった。

二つの必要条件

整理すると

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = -\lambda\mathbf{n}_1 \pm \lambda\mathbf{n}_2.$$

となる。$\mathbf{n}_1$ と $\mathbf{n}_2$ の両方に垂直な $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ との内積をとると

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2) = 0.$$

考えてみよう p_1 はどこから出てくるのだろうか？　ベクトル方程式には現れていない。

中心 $\mathbf{r}_1$ は π_1 上にあるので $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_1 = p_1$ であり、同様に $\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{r}_2 = p_2$ である。$k = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2$ とおく。$\mathbf{r}_1 + \lambda\mathbf{n}_1 = \mathbf{r}_2 \pm \lambda\mathbf{n}_2$ と $\mathbf{n}_1$、次に $\mathbf{n}_2$ との内積をとると

$$p_1 + \lambda = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \pm \lambda k,$$
$$\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{r}_1 + \lambda k = p_2 \pm \lambda.$$

を得る。よって

$$p_1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = \lambda(\pm k - 1), \qquad p_2 - \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{r}_1 = \lambda(k \mp 1).$$

である。上の符号をとれば右辺はどちらも $\lambda(k-1)$ となり、下の符号をとれば $-\lambda(k+1)$ と $\lambda(k+1)$ になる。いずれにしても二つの左辺は等しいか符号が逆であるから、

$$(p_1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_2)^2 = (p_2 - \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{r}_1)^2.$$

幾何学的な意味

第一の条件。これは $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$、$\mathbf{n}_1$、$\mathbf{n}_2$ が同一平面上にある（coplanar）こと（スカラー三重積（scalar triple product）が 0 になること）を表す。言い換えると、C_1 の中心を通る π_1 の法線と、C_2 の中心を通る π_2 の法線とが同じ平面上にある。つまり二つの法線はねじれの位置（skew）になく、（球の中心で）交わるか平行である。

第二の条件。最初の部分により、$|p_1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_2|$ は C_2 の中心と π_1 の距離であり、$|p_2 - \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{r}_1|$ は C_1 の中心と π_2 の距離である。したがってこの条件は、これら二つの距離が等しいこと、すなわち一方の円の中心から他方の円の平面までの距離が、もう一方の中心から最初の円の平面までの距離に等しいことを表している。これは図の対称性を反映している。両方の円は $\mathbf{c}$ から同じ距離 $|\lambda|$ にあるので、$\mathbf{c}$ を通る適当な平面に関する鏡映（reflection）で二つの円が入れ替わり、二つの距離も入れ替わるのである。

検算

- $\pi_1 : z = 0$、$\pi_2 : z = 2$ とし、z 軸上に中心をもつ単位円をとる。これらは $(0,0,1)$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の球上にある。このとき下の符号で $\lambda = 1$ であり、$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \mathbf{0}$、そして第二の条件の二つの距離はどちらも 2 に等しい。

- 数値的には、半径 $R > 1$ の球を無作為に 5000 個つくり、それぞれを単位円で切る平面を無作為に二つとって、円上のすべての点が球上にあることを確かめた。その結果、すべての場合に二つの条件が 10^{-9} 以内の誤差で成り立ち、両方の符号が現れた。互いに無関係な円の組を無作為にとった場合は、毎回第一の条件を満たさなかった。

よくある間違い

- 球の中心が $\mathbf{r}_i$ を通る法線上にあることを根拠なしに仮定してしまう。これこそが証明の核心である。
- $\pm$ を忘れる。球の中心は、二つの平面に対して法線の向く側と同じ側にあることもあれば、反対側にあることもある。
- C_1 の中心が π_1 上にあるので $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_1 = p_1$ となることを忘れる。

STEP のその先へ

ここでの条件は必要条件（necessary condition）にすぎない。完全な「必要十分条件」とするには、さらに二つの法線が実際に交わり、その交点が両方の円から等距離にあることも必要である。このような問題は二次曲面（quadrics）の解析幾何学（analytic geometry）への第一歩であり、そこでは平面や球、それらの交わりが線形代数（linear algebra）を用いて扱われる。スカラー三重積は、体積を測る 3×3 の行列式（determinant）として再び登場する。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、これらの考え方を丁寧に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。