解答例

STEP III 1995、第 7 問

純粋数学 ・ 群と同型

> **STEP III 1995、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q7

鍵となる考え方

結合法則（associativity）は成り立つものとして与えられているので、各集合について確かめるべきことは三つしかない。閉じていること（closure）、単位元（identity）が存在すること、すべての元に逆元（inverse）が存在することである。このうち一つでも成り立たなければ、その集合は群（group）ではない。それを示すには具体的な反例（counterexample）を一つ挙げれば十分である。同型（isomorphism）については、どんな同型写像でも保たれる構造上の特徴に注目する。すなわち、元の個数と、各元の位数（order）である。

解答

以下、「乗法」とは、場合に応じて複素数の通常の乗法、n を法とする（modulo）乗法、または行列の積を意味する。

小問 (i)

$S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ とおく。

- **閉じていること**：$|z| = |w| = 1$ ならば $|zw| = |z||w| = 1$ である。
- **単位元**：$1 \in S$ であり、$1z = z1 = z$ である。
- **逆元**：$|z| = 1$ ならば $z \neq 0$ であり、$z^{-1} = \bar{z}$ である（$z\bar{z} = |z|^2 = 1$ だから）。これも絶対値は 1 である。

よって S は群（無限群）である。

小問 (ii)

4 を法とする乗法のもとで、集合 $\{0,1,2,3\}$ は閉じており、単位元 1 をもつ。しかし 0 には逆元がない。どの b に対しても $0\times b\equiv 0\not\equiv 1$ だからである。したがってこれは群ではない。(0 を取り除いても救われない。$2b$ は常に偶数なので 2 にもやはり逆元がなく、実際 $2\times 2\equiv 0$ であるから、$\{1,2,3\}$ は閉じてさえいない。)

小問 (iii)

加法定理(compound-angle formulae)を用いると、

$$\mathrm{M}(\alpha)\mathrm{M}(\beta)=\begin{pmatrix} c_\alpha c_\beta - s_\alpha s_\beta & -(s_\alpha c_\beta + c_\alpha s_\beta) \\ s_\alpha c_\beta + c_\alpha s_\beta & c_\alpha c_\beta - s_\alpha s_\beta \end{pmatrix} = \mathrm{M}(\alpha+\beta),$$

となる。ここで $c_\alpha=\cos\alpha$、$s_\alpha=\sin\alpha$ などと書いた。cos と sin は周期 2π をもつので、$\alpha+\beta$ を $[0,2\pi)$ に入るように調整したものを γ とすれば $\mathrm{M}(\alpha+\beta)=\mathrm{M}(\gamma)$ である。よって次が成り立つ。

- **閉じていること**:この集合の二つの行列の積は、再びこの集合に属する。
- **単位元**:$\mathrm{M}(0)=I$ である。
- **逆元**:$0<\theta<2\pi$ に対して $\mathrm{M}(\theta)\mathrm{M}(2\pi-\theta)=\mathrm{M}(2\pi)=I$ であり、$\mathrm{M}(0)$ は自分自身の逆元である。

よってこの集合は群である。

小問 (iv)

8 を法として、

$$3^2=9\equiv 1,\qquad 5^2=25\equiv 1,\qquad 7^2=49\equiv 1,$$
$$3\times 5=15\equiv 7,\qquad 3\times 7=21\equiv 5,\qquad 5\times 7=35\equiv 3.$$

1 を含む自明な積と合わせると、これで乗積表全体が得られる(乗法は可換(commutative)である)。どの積も $\{1,3,5,7\}$ に属するので、この集合は閉じている。単位元は 1 であり、各元は自分自身の逆元である。よってこれは位数 4 の群であり、1 以外のすべての元の位数は 2 である。

小問 (v)

単位行列 I の成分は整数であり、この集合は閉じている(整数の積と和は整数である)が、逆元の条件が成り立たない。零行列にはそもそも逆行列がない。正則な行列でさ

えうまくいかないことがある。$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は実行列の範囲で逆行列 $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ をもち、逆元は一意的であるから、A には整数成分の逆行列は存在しない。よってこの集合は群ではない。

考えてみよう 零行列を指摘するだけで本当に十分なのだろうか。それとも、すべての行列について何か言う必要があるのだろうか。

逆元をもたない元が一つあれば、集合が群でないことを示すには十分である。二つ目の例は、問題が特異行列にとどまらないことを示している。整数行列が整数成分の逆行列をもつのは、その行列式（determinant）が ± 1 であるときであり、そのときに限る。$\det A \det A^{-1} = 1$ であり、両方の行列式が整数だからである。そのような行列に制限すれば、確かに群が得られる。

小問 (vi)

5 を法として、2 の累乗は

$$2^1 = 2, \quad 2^2 = 4, \quad 2^3 = 8 \equiv 3, \quad 2^4 = 16 \equiv 1.$$

である。よって $\{1,2,3,4\} = \{2^0, 2^1, 2^2, 2^3\}$ であり、指数を 4 を法として読めば $2^a 2^b = 2^{a+b}$ である。したがってこの集合は閉じており、1 が単位元で、2^a の逆元は 2^{4-a} である。これは群であり、2（または 3）で生成される位数 4 の巡回群（cyclic group）である。

同型

群であるのは (i)、(iii)、(iv)、(vi) であり、組は六つある。

(i) と (iii) は同型である。絶対値 1 の複素数はすべて、$0 \le \theta < 2\pi$ を満たす θ を用いて $e^{i\theta}$ の形に一意的に表せる。$\phi(e^{i\theta}) = M(\theta)$ と定める。$[0, 2\pi)$ の相異なる θ は相異なる行列を与えるので（第 1 列 $(\cos\theta, \sin\theta)$ が θ を決定する）、これは全単射（bijection）である。また乗法を保つ。実際 $e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$ かつ $M(\alpha)M(\beta) = M(\alpha+\beta)$ であり、どちらの群でも角は 2π を法として調整される。幾何学的には、どちらの群も原点のまわりの平面の回転全体である。

(i) または (iii) と、(iv) または (vi)：同型でない。同型写像は全単射なので、二つの群の元の個数は等しくなければならない。群 (i) と (iii) は無限群であり、(iv) と (vi) はどちらも四つの元をもつ。これで四つの組が片づく。

考えてみよう (iv) と (vi) はどちらも四つの元をもち、どちらも可換である。何によって両者を区別できるだろうか。

(iv) と (vi)：同型でない。同型写像 ϕ はすべての元の位数を保つ。$\phi(g)^n = \phi(g^n)$ であり、ϕ は単射（injective）で単位元を単位元に移すので、これが単位元に等しいのは g^n が単位元であるとき、そのときに限るからである。(vi) では元 2 の位数は 4 である。(iv) ではすべての元 g が $g^2 = 1$ を満たすので、位数 4 の元は存在しない。よって同型写像は存在しない。

まとめると、同型である組は (i) と (iii) のみである。

検算

コンピュータを用いて、(iv) と (vi) について閉じていること、単位元、逆元の性質を表の総当たりで確認した。4 を法として 0 と 2 に逆元がないこと、元の位数が (iv) では $1,2,2,2$、(vi) では（$1,2,3,4$ に対して）$1,4,4,2$ であることも確かめた。さらに、10^4 個のランダムな角で $\mathrm{M}(\alpha)\mathrm{M}(\beta) = \mathrm{M}(\alpha+\beta)$ と $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ との対応も確認した。(iv) は手計算ですぐ確かめられる。$(2k+1)^2 = 4k(k+1)+1$ であり $k(k+1)$ は偶数なので、奇数を 2 乗すると 8 を法として 1 になる。

よくある間違い

- (iv) と (vi) は「どちらも四つの元をもつから」同型だと言ってしまう。元の個数が等しいことは必要条件だが、十分条件ではない。
- (v) で $\det A \neq 0$ だけを確かめる。逆行列の成分も整数でなければならない。
- (ii) を 4 を法とする加法と読んでしまう。加法のもとでは位数 4 の巡回群となり (vi) と同型になるが、問題は乗法を指定している。

STEP のその先へ

同型を除けば、位数 4 の群はちょうど二つある。(vi) のような巡回群 C_4 と、(iv) のようなクラインの四元群（Klein four-group）$C_2 \times C_2$ である。元の位数によって小さな群を分類することは、大学の群論の講義で最初に扱う内容の一つである。(i) と (iii) の円周群は、リー群（Lie group）、すなわち滑らかな曲線や曲面でもある群の最も簡単な例である。(v) に現れた行列式 ± 1 の整数行列は群 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ をなし、これは整数論において重要である。さらに学ぶには、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群の入門書）がよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。