解答例

STEP III 1995、第 6 問

純粋数学 ・ 軌跡と反転

> **STEP III 1995、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q6

鍵となる考え方

円 $|z-\mathrm{i}|=1$ は原点を通るので、極形式（polar form）で表すとその方程式はとりわけ簡単になる。すなわち、絶対値（modulus）が偏角（argument）のただ一つの三角関数で表される。z を絶対値と偏角の形で表してしまえば、$1/z$ はすぐに求まる（絶対値の逆数をとり、偏角の符号を反転すればよい）。さらにそれを直交座標形式（Cartesian form）で書けば、円が直線に変わったことがわかる。最後の小問は同じ現象を逆向きにたどるものであり、$w=x+\mathrm{i}y$ とおいて直接計算するのがもっとも速い。

解答

z の絶対値

$r>0$ として $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ とおく。このとき $z-\mathrm{i}=r\cos\theta+\mathrm{i}(r\sin\theta-1)$ であるから、

$$\begin{aligned}|z-\mathrm{i}|^2=1 &\iff r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta-2r\sin\theta+1=1\\ &\iff r^2-2r\sin\theta=0\\ &\iff r=2\sin\theta,\end{aligned}$$

となる。ここで最後の段階では r で割ったが、$z\neq 0$ であるからこれは許される。よって

$$|z|=2\sin\theta.$$

$r>0$ であるから $\sin\theta>0$ でなければならず、したがって $0<\theta<\pi$ である。つまり、この円（中心 i、半径 1）は上半平面にあり、実軸とは原点でのみ接するが、原点は除

外されている。逆に、任意の $\theta \in (0, \pi)$ に対して $z = 2\sin\theta(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ は円上の点を与える。よって θ が $(0, \pi)$ を動くとき、z は原点を除く円全体を描く。

考えてみよう なぜ $|z| = 2\sin\theta$ は図から見て「明らか」なのだろうか。

0 から 2i への線分はこの円の直径である。半円に対する円周角の定理により、0、z、2i を頂点とする三角形は z で直角をなし、0 における角は $\frac{\pi}{2} - \theta$ である。よって $|z| = 2\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = 2\sin\theta$ となる。

$1/z$ の絶対値と偏角

$z = 2\sin\theta(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ であるから、

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2\sin\theta}(\cos(-\theta) + \mathrm{i}\sin(-\theta)),$$

よって

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{2\sin\theta}, \qquad \arg\frac{1}{z} = -\theta.$$

$0 < \theta < \pi$ であるから、角 $-\theta$ は $(-\pi, 0)$ にあり、したがってこれが偏角の主値（principal argument）である。

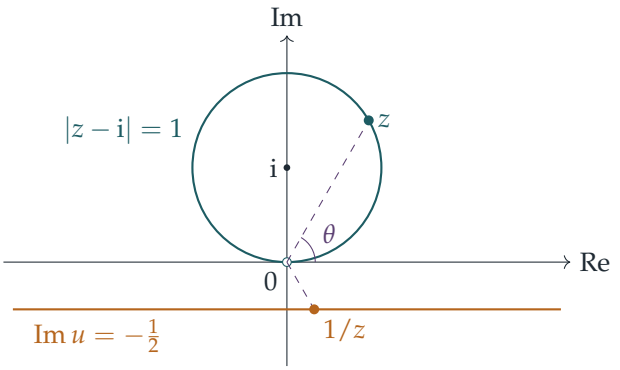
軌跡

$1/z$ が何を描くかを調べるため、直交座標形式に直す。

$$\frac{1}{z} = \frac{\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta}{2\sin\theta} = \tfrac{1}{2}\cot\theta - \tfrac{1}{2}\mathrm{i}.$$

虚部はつねに $-\frac{1}{2}$ であり、θ が $(0, \pi)$ を動くとき、実部 $\frac{1}{2}\cot\theta$ はすべての実数値をちょうど一度ずつとる（$+\infty$ から $-\infty$ まで減少する）。よって $1/z$ は直線 $\mathrm{Im}\, u = -\frac{1}{2}$ の**全体**を描く。

以上より、z は中心 i、半径 1 の円（原点を除く）上にあり、$1/z$ は $-\frac{1}{2}\mathrm{i}$ を通る水平な直線上にある。下の図は両者を示し、あわせて $\theta = \frac{\pi}{3}$ に対応する点の組を描いている。このとき $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}$、$1/z = \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$ である。二つの点はそれぞれ角 θ と $-\theta$ の半直線上にあり、0 からの距離の積は 1 である。z が原点に近づくと、$1/z$ は直線に沿って無限遠へ去っていく。円の最上点 $z = 2\mathrm{i}$ は点 $-\frac{1}{2}\mathrm{i}$、すなわち直線上で原点にもっとも近い点に移る。



軌跡 C

$w=x+\mathrm{i}y\neq 0$ とする（$1/w$ が存在するためには $w\neq 0$ が必要である）。このとき

$$\frac{1}{w}=\frac{\bar{w}}{|w|^2}=\frac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2},\qquad \text{よって}\qquad \mathrm{Re}\,\frac{1}{w}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

したがって、$w\neq 0$ のとき

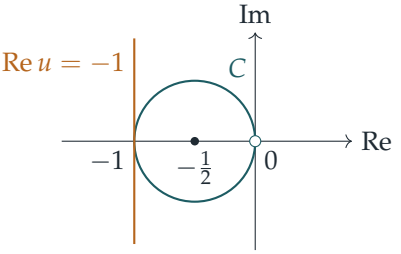
$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,\frac{1}{w}=-1 &\iff x=-(x^2+y^2)\\ &\iff x^2+x+y^2=0\\ &\iff (x+\tfrac{1}{2})^2+y^2=\tfrac{1}{4}.\end{aligned}$$

どの段階も逆にたどれる（0 でない x^2+y^2 を掛けただけである）ので、これは正真正銘の「必要十分条件」である。よって C は円

$$|w+\tfrac{1}{2}|=\tfrac{1}{2},$$

すなわち中心 $-\frac{1}{2}$、半径 $\frac{1}{2}$ の円から**原点を除いたもの**である。原点はこの円上にあるが、そこでは $1/w$ が定義されないので、C には含まれない。

これは最初の小問と鏡写しの関係にある。そこでは 0 を通る円が $z\mapsto 1/z$ によって 0 を通らない直線に移された。ここでは直線 $\mathrm{Re}\,u=-1$ が同じ写像（これは自分自身の逆写像である）によって 0 を通る円に移される。



検算

- $\theta = \frac{\pi}{6}$ とすると、$|z| = 1$、$z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$ であり、確かに $|z - \mathrm{i}| = \left|\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right| = 1$ となる。その逆数は共役複素数 $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i} \approx 0.866 - 0.5\mathrm{i}$ であり、予想どおり虚部は $-\frac{1}{2}$ である。
- $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき、円の最上点 $z = 2\mathrm{i}$ が得られ、$1/z = -\frac{1}{2}\mathrm{i}$ となる。
- C について：$w = -1$ は円上にあり $1/w = -1$ である。$w = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$ は円上にあり $1/w = -1 - \mathrm{i}$ で、実部は -1 である。

各軌跡上の 10 000 個の無作為な点による数値実験でも、三つの結果がすべて確かめられた。

よくある間違い

- 範囲 $0 < \theta < \pi$ を忘れること。公式 $|z| = 2\sin\theta$ は $\sin\theta > 0$ となるところでしか意味をもたない。
- $1/z$ の軌跡を半直線や線分と答えること。$\cot\theta$ は $(0, \pi)$ 上ですべての実数値をとるので、直線全体である。
- C に原点を含めること。原点は円の方程式を満たすが、そこでは $1/w$ が存在しない。

STEP のその先へ

写像 $z \mapsto 1/z$ はメビウス変換（Möbius transformation）$z \mapsto (az + b)/(cz + d)$ の一例である。これらの写像についての中心的な事実は、「一般化された円」（円と直線）を一般化された円に移すということであり、$1/z$ によって直線に移されるのはちょうど原点を通る円である。これはリーマン球面（Riemann sphere）の幾何学の出発点であり、そこでは直線は無限遠点を通る円にすぎない。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、これらすべてを図とともに見事に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。