解答例

STEP III 1995、第 5 問

純粋数学 ・ マクローリン級数

> **STEP III 1995、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q5

鍵となる考え方

$\theta = \sin^{-1} x$ とおくと、$\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x = 1/\sqrt{1-x^2}$ である。$y^{(1)}$ に $\sqrt{1-x^2}$ を掛けるとこの厄介な因子が打ち消され、もう一度微分すれば平方根を含まない 2 階微分方程式（second-order differential equation）が得られる。次にライプニッツ（Leibniz）の公式によってこの方程式は漸化式（recurrence）に変わる。$x = 0$ では因子 $1 - x^2$ が 1 になり、x を含む項は消える。こうして漸化式から、0 におけるすべての導関数（derivative）の値が得られる。

解答

微分方程式

$\theta = \sin^{-1} x$ とおくと $\sin\theta = x$ であり、$|x| < 1$ のとき $\cos\theta = \sqrt{1-x^2} > 0$、さらに $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ である。このとき $y = \sin^2 m\theta$ であり、合成関数の微分法（chain rule）により

$$y^{(1)} = 2m \sin m\theta \cos m\theta \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{m \sin 2m\theta}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \text{よって} \qquad \sqrt{1-x^2}\, y^{(1)} = m \sin 2m\theta.$$

これを x について微分する。左辺には積の微分法（product rule）を用いると

$$\sqrt{1-x^2}\, y^{(2)} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, y^{(1)} = 2m^2 \cos 2m\theta \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

両辺に $\sqrt{1-x^2}$ を掛け、$\cos 2m\theta = 1 - 2\sin^2 m\theta = 1 - 2y$ を用いると

$$(1-x^2)\, y^{(2)} = x\, y^{(1)} + 2m^2(1-2y),$$

となり、これが求める方程式である。

考えてみよう なぜ先に $\sqrt{1-x^2}\,y^{(1)} = m\sin 2m\theta$ を2乗しないのか？

2乗すると $(1-x^2)(y^{(1)})^2 = 4m^2y(1-y)$ となり、これを微分するとすべての項に因子 $2y^{(1)}$ が残る。すると $y^{(1)}$ で割らなければならないが、これは $x=0$ でゼロになり、しかもそこは後で注目するまさにその点である。2乗する前に微分すれば、この割り算をまったく避けられる。

漸化式

$n \geq 1$ として、この方程式をライプニッツの公式を用いて n 回微分する。$1-x^2$ のゼロでない導関数は2つ（$-2x$ と -2）しかなく、x のそれは1つしかないので、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(1-x^2)y^{(2)}\right] &= (1-x^2)y^{(n+2)} - 2nx\,y^{(n+1)} - n(n-1)\,y^{(n)},\\ \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[x\,y^{(1)}\right] &= x\,y^{(n+1)} + n\,y^{(n)},\\ \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[2m^2(1-2y)\right] &= -4m^2\,y^{(n)}.\end{aligned}$$

最後の式には $n \geq 1$ が必要である。そのときに限り、定数 $2m^2$ が微分して消えるからである。両辺を等しいとおくと

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - 2nx\,y^{(n+1)} - n(n-1)y^{(n)} = x\,y^{(n+1)} + n\,y^{(n)} - 4m^2y^{(n)},$$

であり、項を整理すると（$xy^{(n+1)}$ が $2n+1$ 個、また $n(n-1)+n = n^2$）

$$(1-x^2)\,y^{(n+2)} = (2n+1)\,x\,y^{(n+1)} + (n^2-4m^2)\,y^{(n)} \qquad (n \geq 1),$$

が得られ、題意が示された。

マクローリン級数（Maclaurin series）

$x=0$ のとき $\theta = 0$ であるから

$$y(0) = \sin^2 0 = 0, \qquad y^{(1)}(0) = m\sin 0 = 0, \qquad y^{(2)}(0) = 0 + 2m^2(1-0) = 2m^2,$$

となる。最後の値は微分方程式から得られる。漸化式に $x=0$ を代入すると

$$y^{(n+2)}(0) = (n^2-4m^2)\,y^{(n)}(0) \qquad (n \geq 1).$$

奇数階の導関数。 $y^{(1)}(0) = 0$ であるから、漸化式より $y^{(3)}(0) = 0$、さらに $y^{(5)}(0) = 0$、以下同様であり、奇数階の導関数はすべて0で消える。y は x の偶関数（even function）なので、これは納得のいく結果である。

偶数階の導関数。 $n = 2j$ とおくと

$$y^{(2j+2)}(0) = (4j^2 - 4m^2)\, y^{(2j)}(0) = -4(m^2 - j^2)\, y^{(2j)}(0) \qquad (j \geq 1).$$

$y^{(2)}(0) = 2m^2$ から出発し、これを $j = 1, 2, \ldots, k-1$ に対して適用すると

$$y^{(2k)}(0) = 2m^2 \prod_{j=1}^{k-1} (-4(m^2 - j^2)) = (-1)^{k-1}\, 2^{2k-1} \prod_{j=0}^{k-1} (m^2 - j^2),$$

となる。ここで先頭の m^2 を $j = 0$ の因子として積に含めた。（$k = 1$ のとき、この式はあるべき値 $2m^2$ を与える。）

したがってマクローリン級数は

$$y = \sin^2(m \sin^{-1} x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\, 2^{2k-1}}{(2k)!}\, m^2(m^2 - 1^2)(m^2 - 2^2) \cdots (m^2 - (k-1)^2)\, x^{2k},$$

であり、最初の数項は

$$y = m^2 x^2 - \frac{m^2(m^2-1)}{3}\, x^4 + \frac{2m^2(m^2-1)(m^2-4)}{45}\, x^6 - \cdots.$$

である。m が整数ならば、$k > |m|$ であるすべての項は因子 $m^2 - m^2 = 0$ を含むので級数は途中で終わり、y は $2|m|$ 次の多項式（polynomial）となる。

検算

- $m = 1$ のとき：$y = \sin^2(\sin^{-1} x) = x^2$ であり、級数も x^2 を与え、その後はゼロが続く。$m = 2$ のとき：級数は $4x^2 - 4x^4$ を与え、実際 $\sin^2 2\theta = 4\sin^2\theta(1 - \sin^2\theta) = 4x^2 - 4x^4$ である。
- $m = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$ のとき：$y = \sin^2(\pi/12) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 0.066987$ である。級数は $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{32}x^6 + \cdots$ であり、最初の 3 項で 0.066895 となり、さらに項を加えれば差は縮まっていく。
- 微分方程式が無作為に選んだ x と m で成り立つこと、級数の係数が方程式を厳密に満たすこと、そして級数（300 項まで）が $|x| \leq 0.8$ において y と約 10^{-15} の精度で一致することを数値的に確認した。

よくある間違い

- $n = 0$ で漸化式を使ってしまうこと。漸化式は $n \geq 1$ のときにのみ成り立つ。$n = 0$ のときは定数 $2m^2$ が残るからである。$n = 0$ の場合は元の方程式そのものであり、$y^{(2)}(0) = 2m^2$ はそこから得たのであった。

- ライプニッツの公式の係数を誤ること。項 $-n(n-1)y^{(n)}$ は $\binom{n}{2}\cdot(-2)$ から生じるのであって、$\binom{n}{2}\cdot(-2x)$ からではない。
- 一般項を交代符号なしで書いてしまうこと。各段階で $4(j^2-m^2)$ を掛けるが、これは $m^2>j^2$ のとき負である。

STEP のその先へ

導関数から作ったマクローリン級数が元の関数に等しいとは限らないが、ここでは $|x|<1$ で等しくなる。この級数の収束半径（radius of convergence）は 1 であり（m が整数でないときは比判定法（ratio test）による）、$\sin^{-1}x$ は $x=\pm1$ で振る舞いが悪くなる。整数 m に対して得られる多項式はチェビシェフ多項式（Chebyshev polynomials）の仲間である。$\cos 2m\theta$ は $\sin\theta$ の多項式だからである。このような級数が本当に元の関数に収束する理由を知るには、Abbott の *Understanding Analysis* で剰余項付きのテイラーの定理（Taylor's theorem with remainder）について読むとよい。Needham の *Visual Complex Analysis* は、収束半径が ±1 における不具合によって決まる理由を説明している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。