解答例

STEP III 1995、第 4 問

純粋数学 • 三角級数の和

> **STEP III 1995、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q4

鍵となる考え方

余弦の和は複素指数関数（complex exponential）の和の実部（real part）であり、$\sum e^{ik\theta}$ は等比級数（geometric series）である。これを和の公式でまとめ、さらに分子と分母から「半角」（half-angle）の因子 $e^{i\theta/2}$ をくくり出すと、扱いにくい $e^{im\theta}-1$ の項が正弦に変わる。分母の $\sin(\frac{1}{2}\theta)$ はここから現れるのである。不等式については、$C_n(\theta)$ を $\frac{1}{2}$ がはっきりと分離する形に書き直すのがこつである。

解答

和 C_n と S_n

$z = e^{i\theta}$ とおく。$0 < \theta < 2\pi$ より $z \neq 1$ であるから、等比級数の和の公式が使える：

$$C_n(\theta) + iS_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \frac{e^{i(n+1)\theta}-1}{e^{i\theta}-1}.$$

ここで $e^{i\phi}-1 = e^{i\phi/2}(e^{i\phi/2}-e^{-i\phi/2}) = 2i\,e^{i\phi/2}\sin(\frac{1}{2}\phi)$ を、分子（$\phi=(n+1)\theta$ として）と分母（$\phi=\theta$ として）に用いると、

$$C_n(\theta) + iS_n(\theta) = \frac{2i\,e^{i(n+1)\theta/2}\sin(\frac{1}{2}(n+1)\theta)}{2i\,e^{i\theta/2}\sin(\frac{1}{2}\theta)} = e^{in\theta/2}\,\frac{\sin(\frac{1}{2}(n+1)\theta)}{\sin(\frac{1}{2}\theta)}.$$

$0 < \frac{1}{2}\theta < \pi$ であるから、分母は 0 でない。分数部分は実数であるから、（$e^{in\theta/2} = \cos\frac{1}{2}n\theta + i\sin\frac{1}{2}n\theta$ を用いて）実部と虚部（imaginary part）を比較すると

$$C_n(\theta) = \frac{\cos(\frac{1}{2}n\theta)\sin(\frac{1}{2}(n+1)\theta)}{\sin(\frac{1}{2}\theta)}, \qquad S_n(\theta) = \frac{\sin(\frac{1}{2}n\theta)\sin(\frac{1}{2}(n+1)\theta)}{\sin(\frac{1}{2}\theta)}.$$

を得る。前者が求める結果であり、後者は S_n に対応する式である。

考えてみよう 複素数を使わずにこれを導く方法はあるだろうか？

ある。各項に $2\sin(\frac{1}{2}\theta)$ を掛け、積和公式（product-to-sum formula）

$$2\sin(\tfrac{1}{2}\theta)\cos k\theta = \sin((k+\tfrac{1}{2})\theta) - \sin((k-\tfrac{1}{2})\theta).$$

を用いればよい。$k=0$ から n まで和をとると、最後と最初の項を除いてすべて打ち消し合う（望遠鏡和（telescoping sum））：

$$2\sin(\tfrac{1}{2}\theta)\,C_n(\theta) = \sin((n+\tfrac{1}{2})\theta) - \sin(-\tfrac{1}{2}\theta) = \sin((n+\tfrac{1}{2})\theta) + \sin(\tfrac{1}{2}\theta). \qquad (*)$$

和積公式（sum-to-product formula）$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$ を $A=(n+\frac{1}{2})\theta$、$B=\frac{1}{2}\theta$ として用いると、右辺は $2\sin(\frac{1}{2}(n+1)\theta)\cos(\frac{1}{2}n\theta)$ となり、先に求めた結果と一致する。

不等式

式 $(*)$ はまさに求めたい形である。$2\sin(\frac{1}{2}\theta)\neq 0$ で割ると

$$C_n(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\sin((n+\frac{1}{2})\theta)}{2\sin(\frac{1}{2}\theta)}.$$

となる。（与えられた公式から出発する場合は、$2\cos(\frac{1}{2}n\theta)\sin(\frac{1}{2}(n+1)\theta) = \sin((n+\frac{1}{2})\theta) + \sin(\frac{1}{2}\theta)$ を用いれば同じ式が得られる。）したがって

$$\left|C_n(\theta) - \frac{1}{2}\right| = \frac{|\sin((n+\frac{1}{2})\theta)|}{2\sin(\frac{1}{2}\theta)} \leq \frac{1}{2\sin(\frac{1}{2}\theta)},$$

である。ここで、$0<\theta<2\pi$ のとき $\sin(\frac{1}{2}\theta)>0$ であること（よって分母に絶対値（modulus）は不要である）と、$|\sin x|\leq 1$ であることを用いた。これが求める不等式であり、等号が成り立つのは $\sin((n+\frac{1}{2})\theta)=\pm 1$ のとき、かつそのときに限る。

考えてみよう $\sin(\frac{1}{2}\theta)$ が正であることはなぜ重要なのだろうか？

もし θ が $(0,2\pi)$ の外の値もとれるとすると、$\sin(\frac{1}{2}\theta)$ は負になりうる。そのとき不等式の右辺は負となるが、絶対値が負の数以下になることはありえない。与えられた範囲では $\frac{1}{2}\theta\in(0,\pi)$ であるから、上界は確かに正の数である。

検算

- $n=1$ のとき：$C_1 = 1+\cos\theta = 2\cos^2(\frac{1}{2}\theta)$ であり、公式からは $\cos(\frac{1}{2}\theta)\sin\theta/\sin(\frac{1}{2}\theta) = 2\cos^2(\frac{1}{2}\theta)$ が得られる。同様に、$S_1=\sin\theta$ は $\sin(\frac{1}{2}\theta)\sin\theta/\sin(\frac{1}{2}\theta)$ と一致する。

- $\theta \to 0$ のとき、C_n の公式は $(n+1)$ に近づく。これは 1 を $n+1$ 個足した和である。一方、上界 $1/(2\sin\frac{1}{2}\theta)$ は発散するが、そうでなければならない。
- 数値で確かめる。$n=3$、$\theta=1$ のとき、直接和をとると $C_3(1) \approx 0.1342$ となって公式と一致し、$|C_3 - \frac{1}{2}| \approx 0.366 \leq 1/(2\sin\frac{1}{2}) \approx 1.043$ である。等号は、たとえば $n=2$、$\theta=\pi/5$ のときに成り立ち、両辺とも $1.618\ldots$ となる。

よくある間違い

- 和が $k=0$ から始まり、項が $n+1$ 個あることを忘れる。等比級数の分子は $e^{in\theta}$ ではなく $e^{i(n+1)\theta}$ である。
- 分母を実数にしないまま $\left(e^{i(n+1)\theta}-1\right)/\left(e^{i\theta}-1\right)$ の実部をとろうとする。半角による因数分解を使えば、これがすっきりと行える。
- $|\sin(\frac{1}{2}\theta)|$ と書いておきながら、それがなぜ $\sin(\frac{1}{2}\theta)$ に等しいのかを述べない。

STEP のその先へ

関数 $C_n(\theta) - \frac{1}{2} = \sin\left((n+\frac{1}{2})\theta\right)/\left(2\sin\frac{1}{2}\theta\right)$ は、定数倍を除いて**ディリクレ核**（Dirichlet kernel）であり、フーリエ級数（Fourier series）の理論の中心的な対象である。関数の第 n 部分フーリエ和は、この核に関するその関数の平均として表される。ここで証明した評価は、分子の振動と合わせて、フーリエ級数がどのようなときに収束（convergence）するかを証明する出発点となる（また、$\sum\cos(k\theta)/k$ のような級数に対するディリクレ（Dirichlet）の判定法の出発点でもある）。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）には、まさにこれらの和を用いたフーリエ級数についての読みやすい章がある。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。