解答例

STEP III 1995、第 3 問

純粋数学 ・ 減衰振動

> **STEP III 1995、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q3

鍵となる考え方

$x = \mathrm{e}^{\lambda t}$ とおいてみる。すると微分方程式（differential equation）は λ の 2 次方程式になり、3 つの場合分けはその判別式（discriminant）の 3 つの可能性（異なる 2 つの実数解、重解、虚数解）にほかならない。減衰振動の場合、停留点（stationary point）は半周期ずつの等しい時間間隔で現れ、そのような各区間において振動する因子は符号が反転するだけであり、指数関数の因子は同じ割合で小さくなる。これが、相続く極値の比が一定になる理由である。

解答

$x = \mathrm{e}^{\lambda t}$ を代入すると、補助方程式（auxiliary equation）

$$\lambda^2 + 2k\lambda + 1 = 0, \qquad \lambda = -k \pm \sqrt{k^2 - 1}.$$

が得られる。以下を通して、A と B は任意定数である。

小問 (i)：$k > 1$

解は相異なる実数であるから、

$$x = A\,\mathrm{e}^{(-k+\sqrt{k^2-1})\,t} + B\,\mathrm{e}^{(-k-\sqrt{k^2-1})\,t}.$$

となる。（$\sqrt{k^2-1} < k$ より、指数はどちらも負である。これは振動を伴わない過減衰（overdamping）である。）

小問 (ii)：$k = 1$

補助方程式は $(\lambda+1)^2 = 0$ であり、重解 $\lambda = -1$ をもつ。もう1つの独立な解は $t\,\mathrm{e}^{-t}$ であるから、

$$x = (A + Bt)\,\mathrm{e}^{-t}.$$

となる。（確認：$x = t\mathrm{e}^{-t}$ ならば $x' = (1-t)\mathrm{e}^{-t}$、$x'' = (t-2)\mathrm{e}^{-t}$ であり、$(t-2) + 2(1-t) + t = 0$ となる。）

小問 (iii)：$0 < k < 1$

このとき $k^2 - 1 < 0$ であるから、解は $\lambda = -k \pm \mathrm{i}\omega$ である。ただし

$$\omega = \sqrt{1-k^2} > 0.$$

である。$\mathrm{e}^{(-k\pm\mathrm{i}\omega)t}$ の実数の組み合わせをとると、

$$x = \mathrm{e}^{-kt}(A\cos\omega t + B\sin\omega t).$$

となる。

相続く極値

$x(0) = 0$ より $A = 0$ でなければならないので、$x = B\,\mathrm{e}^{-kt}\sin\omega t$ であり、$B \neq 0$ である（そうでなければ $x \equiv 0$ となり、極大も極小も存在しない）。微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = B\,\mathrm{e}^{-kt}(\omega\cos\omega t - k\sin\omega t).$$

$k^2 + \omega^2 = 1$ であるから、$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ として $k = \sin\varphi$、$\omega = \cos\varphi$ と書くことができ、このとき

$$\omega\cos\omega t - k\sin\omega t = \cos(\omega t + \varphi).$$

となる。よって $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = B\,\mathrm{e}^{-kt}\cos(\omega t + \varphi)$ であり、これは $\omega t + \varphi$ が $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍のときちょうど 0 になり、そのような各時刻で符号を変える。したがって（$t > 0$ における）停留点は

$$t_n = t_1 + \frac{(n-1)\pi}{\omega}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

にあり、π/ω ずつ等間隔に並ぶ。さらに各停留点で $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ の符号が変わるので、それらは確かに極大と極小が交互に現れる。

? **考えてみよう** t_1 を具体的に求めずに、$x(t_{n+1})$ と $x(t_n)$ を比較するにはどうすればよいか？

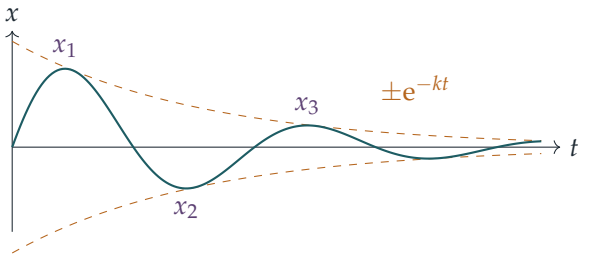
時間を π/ω だけ進めると ωt に π が加わり、$\sin(\theta+\pi) = -\sin\theta$ である。よって

$$x_{n+1} = B\,\mathrm{e}^{-k(t_n+\pi/\omega)}\sin(\omega t_n+\pi) = -\,\mathrm{e}^{-k\pi/\omega}\,B\,\mathrm{e}^{-kt_n}\sin\omega t_n = -\,\mathrm{e}^{-k\pi/\omega}\,x_n.$$

また $x_n \neq 0$ である。なぜなら、$\sin\omega t_n = 0$ ならば $\cos\omega t_n = \pm 1$ となり、このとき $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = \pm B\omega\,\mathrm{e}^{-kt_n} \neq 0$ となってしまうからである。ゆえに

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \alpha, \qquad \text{ただし} \alpha = \mathrm{e}^{-k\pi/\omega} = \exp\left(-\frac{k\pi}{\sqrt{1-k^2}}\right),$$

であり、これは要求どおり n によらない。(負の符号は、極大と極小が交互に現れることを裏づけている。)



k^2 の公式

対数をとると $\ln\alpha = -\dfrac{k\pi}{\sqrt{1-k^2}}$ であるから、

$$(\ln\alpha)^2 = \frac{k^2\pi^2}{1-k^2} \implies (\ln\alpha)^2 - k^2(\ln\alpha)^2 = k^2\pi^2 \implies k^2 = \frac{(\ln\alpha)^2}{\pi^2+(\ln\alpha)^2},$$

となり、これが求める結果である。

検算

- $k \to 0$(減衰なし)のとき $\alpha \to 1$、$\ln\alpha \to 0$ であるから、公式は $k^2 \to 0$ を与え、期待どおりである。このとき極値はすべて同じ大きさになる。
- $k \to 1^-$ のとき $\alpha \to 0$、$(\ln\alpha)^2 \to \infty$ であるから $k^2 \to 1$ となる。臨界減衰(critical damping)では、運動はもはや振り戻さない。
- 数値的に、$k = 0.5$、$x(0) = 0$ として方程式を逐次的に解き進めると、相続く極値の比は 0.163034 となり、$\mathrm{e}^{-0.5\pi/\sqrt{0.75}} \approx 0.163034$ と一致する。さらに $(\ln\alpha)^2/(\pi^2+(\ln\alpha)^2) = 0.25 = k^2$ となる。

よくある間違い

- 極大とその次の極小の間の時間を、半周期 π/ω ではなく 1 周期 $2\pi/\omega$ としてしまう。こうすると α ではなく α^2 が得られてしまう。
- 極値が $\sin\omega t = \pm 1$ となるところで生じると考えてしまう。実際はそうではない。減衰する因子のために極値の位置は早まり、$\tan\omega t = \omega/k$ となるところに来る。上の議論では極値の正確な位置は一切必要なく、その間隔だけが必要である。

STEP のその先へ

量 $-\ln\alpha$ は**対数減衰率**（logarithmic decrement）と呼ばれる。技術者は記録された振動からこれを測定し、この問題の公式によってそれを減衰の大きさ k に換算する。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）では、過減衰・臨界減衰・減衰振動が詳しく扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。