解答例

STEP III 1995、第 2 問

純粋数学 ・ 漸化式による積分

> **STEP III 1995、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q2

鍵となる考え方

因数 $\sqrt{x}$ と $\sqrt{a-x}$ はどちらも置換（substitution）$x = a\sin^2\theta$ を示唆している。この置換により、これらは同時に $\sqrt{a}\sin\theta$ と $\sqrt{a}\cos\theta$ になる（I_0 については、うまい幾何的な近道もある）。漸化式（reduction formula）を得るには、x の指数が 1 だけ下がるように部分積分（integration by parts）を行う。すると $a-x$ の指数が 1 だけ上がるので、再び $a-x$ を用いてそれを分離する。これにより I_n 自身が再び現れるので、項をまとめることができる。

以下、つねに $a > 0$ とする。

解答

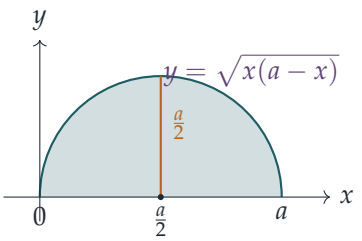
I_0 を求める

$\mathrm{I}_0 = \int_0^a x^{1/2}(a-x)^{1/2}\,\mathrm{d}x$ を求めたい。$x = a\sin^2\theta$ とおくと、$\mathrm{d}x = 2a\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$ である。x が 0 から a まで動くとき、θ は 0 から $\frac{\pi}{2}$ まで動き、この範囲で $\sin\theta, \cos\theta \geq 0$ である。よって $\sqrt{x} = \sqrt{a}\sin\theta$ かつ $\sqrt{a-x} = \sqrt{a}\cos\theta$ であり、符号の問題は生じない。したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_0 &= \int_0^{\pi/2} (\sqrt{a}\sin\theta)(\sqrt{a}\cos\theta)\,2a\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 2a^2\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{a^2}{4}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{a^2}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^2}{8},\end{aligned}$$

となり、求める結果が得られる。ここでは $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$ と $\sin^2 2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 4\theta)$ を用い、さらに $\cos 4\theta$ の $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上での積分が 0 になることを用いた。

図で見る。$y = \sqrt{x(a-x)}$ とすると $y^2 = ax - x^2$ であり、これを変形すると $y \geq 0$ のもとで $(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = (\frac{a}{2})^2$ となる。よって I_0 は半径 $\frac{a}{2}$ の半円（semicircle）の面積であり、その値は $\frac{1}{2}\pi(\frac{a}{2})^2 = \frac{\pi a^2}{8}$ である。



漸化式

$n \geq 1$ とする。$u = x^{n+\frac{1}{2}}$、$\mathrm{d}v = (a-x)^{1/2}\,\mathrm{d}x$ として部分積分する。このとき $\mathrm{d}u = (n+\frac{1}{2})x^{n-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$、$v = -\frac{2}{3}(a-x)^{3/2}$ である。これより

$$\mathrm{I}_n = \left[-\tfrac{2}{3}x^{n+\frac{1}{2}}(a-x)^{3/2}\right]_0^a + \frac{2}{3}\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_0^a x^{n-\frac{1}{2}}(a-x)^{3/2}\,\mathrm{d}x.$$

を得る。境界項は両端で 0 になる。$x = a$ では因数 $(a-x)^{3/2}$ により、$x = 0$ では $x^{n+\frac{1}{2}}$ による。なお $\frac{2}{3}(n+\frac{1}{2}) = \frac{2n+1}{3}$ である。

> **考えてみよう** 新しい積分には $(a-x)^{3/2}$ が含まれており、これは I_{n-1} の形ではない。これをどう扱えばよいだろうか。

$(a-x)^{3/2} = (a-x)\,(a-x)^{1/2}$ と書き、最初の因数を展開する：

$$\int_0^a x^{n-\frac{1}{2}}(a-x)^{3/2}\,\mathrm{d}x = a\int_0^a x^{n-\frac{1}{2}}(a-x)^{1/2}\,\mathrm{d}x - \int_0^a x^{n+\frac{1}{2}}(a-x)^{1/2}\,\mathrm{d}x = a\,\mathrm{I}_{n-1} - \mathrm{I}_n.$$

したがって

$$\mathrm{I}_n = \frac{2n+1}{3}(a\,\mathrm{I}_{n-1} - \mathrm{I}_n) \quad\Longrightarrow\quad (2n+4)\,\mathrm{I}_n = (2n+1)\,a\,\mathrm{I}_{n-1},$$

となる。ここでは両辺を 3 倍し、I_n の項をまとめた（$3 + 2n + 1 = 2n + 4$）。これが求める結果である。

I_n の値を求める

$k = n, n-1, \ldots, 1$ に対して $\mathrm{I}_k = \dfrac{(2k+1)a}{2k+4}\,\mathrm{I}_{k-1}$ を順に適用し、I_0 まで下ろすと

$$\mathrm{I}_n = a^n \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k+1)}{\prod_{k=1}^{n}(2k+4)} \cdot \frac{\pi a^2}{8}.$$

を得る。次に二つの積を整理する。分子は奇数の積 $3\cdot5\cdots(2n+1)$ である。欠けている偶数 $2\cdot4\cdots(2n)=2^n n!$ を補うと

$$\prod_{k=1}^{n}(2k+1)=\frac{(2n+1)!}{2^n\,n!}.$$

となる。分母は $\prod_{k=1}^{n}2(k+2)=2^n\cdot3\cdot4\cdots(n+2)=2^n\,\dfrac{(n+2)!}{2}$ である。よって

$$\mathrm{I}_n=\frac{\pi a^{n+2}}{8}\cdot\frac{(2n+1)!}{2^n\,n!}\cdot\frac{2}{2^n\,(n+2)!}=\boxed{\frac{\pi\,a^{n+2}\,(2n+1)!}{4^{n+1}\,n!\,(n+2)!}}$$

この式は $n=0$ のときにも正しい値 $\frac{\pi a^2}{8}$ を与える。

検算

- $n=1$：漸化式より $6\mathrm{I}_1=3a\mathrm{I}_0$ なので $\mathrm{I}_1=\frac{\pi a^3}{16}$ である。公式からは $\pi a^3\cdot3!/(16\cdot1!\cdot3!)=\frac{\pi a^3}{16}$ が得られ、一致する。
- 対称性：x を $a-x$ で置き換えると、$\mathrm{I}_1=\int_0^a x^{1/2}(a-x)^{3/2}\,\mathrm{d}x$ でもあることがわかる。二つの表示を足し合わせると $2\mathrm{I}_1=a\mathrm{I}_0$ となり、これにより $\mathrm{I}_1=\frac{\pi a^3}{16}$ が独立に確かめられる。
- $a=1$ として数値的に計算すると、シンプソン則（Simpson's rule）または中点則（midpoint rule）による数値積分で $\mathrm{I}_0\approx0.392699=\pi/8$、$\mathrm{I}_3\approx0.085903$ が得られる。公式からは $\pi\cdot7!/(4^4\cdot3!\cdot5!)=35\pi/1280\approx0.085903$ となる。

よくある間違い

- v の符号を間違える：$\int(a-x)^{1/2}\,\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}(a-x)^{3/2}$ であり、合成関数の微分法（chain rule）からマイナス符号が出てくる。
- 右辺に I_n が再び現れ、それをまとめる必要があることに気づかず、直接 I_{n-1} にたどり着こうとする。
- $3\cdot4\cdots(n+2)=(n+2)!/2$ における因数 2 を落とす。

STEP のその先へ

これらの積分は、ベータ関数（Beta function）$B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t$ の特別な場合である。$x=at$ と置換すると $\mathrm{I}_n=a^{n+2}B\left(n+\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ であることがわかる。ここで

証明した漸化式は、恒等式 $B(p+1,q) = \frac{p}{p+q}B(p,q)$ の一つの場合である。大学1年次の講義では公式 $B(p,q) = \Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$ を学ぶが、これは π がどこから来るのかを説明してくれる。すなわち $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ である。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には、この種の漸化式の問題がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。