解答例

STEP III 1995、第 14 問

確率・統計 ・ 積率母関数

STEP III 1995、問 14

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/95-s3-q14

鍵となる考え方

積率母関数（moment generating function, MGF）は、独立な確率変数（independent random variables）の和を積に変える。すなわち、T_1 と T_2 が独立ならば $\mathrm{E}[\mathrm{e}^{\theta(T_1+T_2)}] = \mathrm{E}[\mathrm{e}^{\theta T_1}]\,\mathrm{E}[\mathrm{e}^{\theta T_2}]$ である。したがって、1 つの MGF を求めてそれを累乗し、その結果を同じ族の密度関数の MGF として見抜けばよい。MGF はその分布を決定するので、見抜くことができれば十分である。

解答

T の MGF

実数 θ に対して、

$$M_T(\theta) = \mathrm{E}[\mathrm{e}^{\theta T}] = \int_0^\infty t\,\mathrm{e}^{-(1-\theta)t}\,\mathrm{d}t.$$

これが収束（converge）するのは $\theta < 1$ のときに限る（そうでなければ被積分関数は 0 に近づかない）ので、以下では $\theta < 1$ と仮定する。繰り返し必要となる積分は

$$\int_0^\infty t^k \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{k!}{\lambda^{k+1}} \qquad (\lambda > 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots),$$

である。これは部分積分（integration by parts）を k 回行えば得られる（あるいは $s = \lambda t$ と置換し、$\int_0^\infty s^k \mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s = k!$ を用いてもよい）。$k = 1$、$\lambda = 1 - \theta > 0$ とすると、

$$\boxed{M_T(\theta) = \frac{1}{(1-\theta)^2}}, \qquad \theta < 1.$$

簡単な確認として、$M_T(0) = 1$ であり、これはすべての MGF が満たすべき性質である。

U の MGF

T_1 と T_2 を 2 つの問題にかかる時間とすると、$U = T_1 + T_2$ であり、T_1 と T_2 はそれぞれ密度関数 f をもち、（問題文にあるとおり）独立である。すると $e^{\theta T_1}$ と $e^{\theta T_2}$ も独立であるから、それらの積の期待値は期待値の積に等しい。

$$M_U(\theta) = \mathrm{E}[e^{\theta T_1} e^{\theta T_2}] = M_T(\theta)^2 = \frac{1}{(1-\theta)^4}, \qquad \theta < 1.$$

U の密度関数

次に、候補となる密度関数 $g(u) = \frac{1}{6}u^3 e^{-u}$ の MGF を計算する。上の積分を $k = 3$、$\lambda = 1 - \theta$ として用いると、

$$\int_0^\infty e^{\theta u} \tfrac{1}{6} u^3 e^{-u} \, du = \frac{1}{6} \cdot \frac{3!}{(1-\theta)^4} = \frac{1}{(1-\theta)^4}.$$

（$\theta = 0$ とおくと g の積分が 1 になることが確かめられるので、これは確かに密度関数である。）

考えてみよう g が U と同じ MGF をもつことを示した。なぜこのことから U の密度関数が g であるといえるのか？

ここでは MGF の一意性定理（uniqueness theorem）を用いる。すなわち、2 つの確率変数の MGF が $\theta = 0$ を含むある開区間上で存在して一致するならば、両者は同じ分布をもつ。ここでは 2 つの MGF はすべての $\theta < 1$ で一致し、その範囲は区間 $(-1, 1)$ を含む。したがって U の密度関数は

$$g(u) = \frac{1}{6} u^3 e^{-u}, \qquad u \geq 0,$$

であり、題意は示された。

一意性定理を使いたくなければ、畳み込みの公式（convolution formula）から直接同じ結果が得られる。$T_1, T_2 \geq 0$ であるから、$u \geq 0$ に対して、

$$\begin{aligned} g(u) &= \int_0^u f(s)\, f(u-s)\, ds = e^{-u} \int_0^u s(u-s)\, ds \\ &= e^{-u} \left[\tfrac{1}{2} u s^2 - \tfrac{1}{3} s^3 \right]_0^u = \frac{1}{6} u^3 e^{-u}. \end{aligned}$$

n 問の合計時間

$U_n = T_1 + \cdots + T_n$ とする。ここで T_i は独立で、密度関数 f をもつ。同じ積の議論により

$$M_{U_n}(\theta) = M_T(\theta)^n = \frac{1}{(1-\theta)^{2n}}, \qquad \theta < 1.$$

が得られる。$n=2$ の場合のパターンから、密度関数 $\mathrm{h}_n(u) = c\,u^{2n-1}\mathrm{e}^{-u}$ が予想される。その MGF は、$k=2n-1$ の場合の積分により $c\,(2n-1)!/(1-\theta)^{2n}$ である。これが M_{U_n} に等しくなるのは、ちょうど $c=1/(2n-1)!$ のときである。再び一意性により、n 問の合計時間の密度関数は

$$\boxed{\mathrm{h}_n(u) = \frac{u^{2n-1}\mathrm{e}^{-u}}{(2n-1)!}, \qquad u \geq 0.}$$

である。$n=1$ のときこれは f となり、$n=2$ のときは g となって、確かに期待どおりである。

検算

- $\mathrm{E}[T] = M_T'(0) = 2$ であり、これは $\int_0^\infty t^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 2$ と一致する。よって $\mathrm{E}[U_n] = 2n$ である。h_n からも同じ値が得られる：$\int_0^\infty u^{2n}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u/(2n-1)! = (2n)!/(2n-1)! = 2n$。
- 数値的には、シンプソンの公式（Simpson's rule）により $\int_0^\infty \mathrm{e}^{0.5t}\,t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 4.000$ が得られ、$1/(1-0.5)^2$ と一致する。f から抽出した 3 つの時間の和を 2×10^5 個シミュレーションしたところ $\mathrm{P}(U_3 \leq 5) \approx 0.386$ となり、h_3 から得られる $\int_0^5 u^5\mathrm{e}^{-u}/120\,\mathrm{d}u \approx 0.384$ とよく合った。

よくある間違い

- 制限 $\theta<1$ を忘れること。$\theta \geq 1$ では MGF は存在しない。
- MGF を掛ける代わりに足してしまうこと。U の MGF は $M_T(\theta)^2$ であり、$2M_T(\theta)$ ではない。（$2T$ の MGF は $M_T(2\theta)$ であり、これもまた別物である。）
- 正規化定数の階乗を間違えること。u の指数は $2n-1$ であるから、定数は $1/(2n-1)!$ であって、$1/(2n)!$ ではない。

STEP のその先へ

密度関数 $t\mathrm{e}^{-t}$ は形状パラメータ 2、レートパラメータ 1 のガンマ分布（gamma distribution）であり、h_n は形状パラメータ $2n$ のガンマ分布である。この問題は、レートが等しい独立なガンマ分布に従う確率変数の和は、形状パラメータを足し合わせたガンマ分布に従うことを示している。特に、各 T は 2 つの独立な指数分布（exponential distribution）に従う時間の和のようにふるまう。これが、ポアソン過程（Poisson process）において k 番目の事象が起こるまでの待ち時間としてガンマ分布が現れる

仕組みである。大学では、常に存在する特性関数（characteristic function）$\mathrm{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta X}]$ を学び、それを用いて中心極限定理（central limit theorem）を証明する。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、母関数とこれらの考え方をわかりやすく展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。