解答例

STEP III 1995、第 13 問

確率・統計　・　雑音のある二元通信路

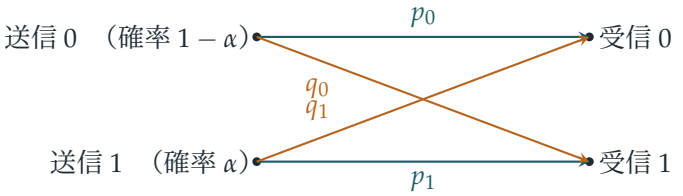
> **STEP III 1995、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q13

鍵となる考え方

すべては、1 桁ずつ見ることから導かれる。各桁は「二元通信路（binary channel）」を通って伝わる。すなわち、0 または 1 として送信され、そのまま届くか反転するかのどちらかである。1 桁に何が起こるかがわかれば、メッセージ全体はその独立（independent）な複製を多数並べたものにすぎず、確率は掛け合わせればよい。中継局については、2 区間を経て桁が正しく届くのは反転が**偶数**回起きたときである、と気づくことが要点である。

解答

以下を通して、メッセージの長さを $N = 10^k$ と書く。問題の意図どおり、元のメッセージの各桁は独立であり（各桁は確率 α で 1 である）、ケーブルは各桁を他のすべての桁と独立に扱うものと仮定する。1 桁についての図を以下に示す。



メッセージ全体が正しく受信される確率

ある特定の桁が正しく受信されるという事象を C とする。その桁は、そのまま届く 0 か、そのまま届く 1 のいずれかであるから、

$$\mathrm{P}(C) = (1-\alpha)p_0 + \alpha p_1.$$

N 個の桁の独立性により、

$$\mathrm{P}(\text{メッセージ全体が正しい}) = \left[(1-\alpha)p_0 + \alpha p_1\right]^{10^k}.$$

確率 β

桁が 1 として受信されるのは、1 であってそのまま届いた場合か、0 であって反転した場合である。よって

$$\beta = \alpha p_1 + (1-\alpha)q_0.$$

ここで

$$\begin{aligned}\beta = \alpha &\iff \alpha p_1 + (1-\alpha)q_0 = \alpha \iff (1-\alpha)q_0 = \alpha(1-p_1) = \alpha q_1 \\ &\iff q_0 = \alpha(q_0+q_1) \iff \alpha = \frac{q_0}{q_0+q_1},\end{aligned}$$

である。最後の段階では q_0+q_1 で割っているが、これはケーブルが完全である場合（$q_0 = q_1 = 0$ で、このとき $\beta = \alpha$ は自明に成り立つ）を除いて正である。どの段階も逆にたどれるので、これで求める「必要十分条件」が示された。言葉で言えば、ケーブルを通しても 1 の割合が変わらないのは、$0 \to 1$ の流れ（すなわち $(1-\alpha)q_0$）と $1 \to 0$ の流れ（すなわち αq_1）がちょうど釣り合うときである。

すべて 0 のメッセージ

この条件が成り立ち、受信した桁がすべて 0 であったとする。（送信した桁、受信した桁）の組は位置ごとに独立であるから、メッセージ全体が正しいという条件付き確率（conditional probability）は、1 桁ごとの確率 $\mathrm{P}(\text{送信0} \mid \text{受信0})$ の積である。

> **考えてみよう** 「0 を受信した」ことを、何が送信されたかについての主張にどう変換すればよいか。

ベイズの定理（Bayes' theorem）を用いる。桁が 0 として受信される確率は $1-\beta$ であり、条件より $\beta = \alpha$ なので $1-\beta = 1-\alpha$ である。したがって

$$\mathrm{P}(\text{送信0} \mid \text{受信0}) = \frac{(1-\alpha)p_0}{1-\beta} = \frac{(1-\alpha)p_0}{1-\alpha} = p_0,$$

となり、ゆえに

$$\mathrm{P}(\text{メッセージが正しい} \mid \text{すべて 0 を受信}) = p_0^{10^k}.$$

五分五分の確率

$q_0 = q_1 = q$、$\alpha = \frac{1}{2}$ のとき、各桁が正しい確率は $\frac{1}{2}(1-q) + \frac{1}{2}(1-q) = 1-q$ である。10^6 桁のメッセージについて

$$(1-q)^{10^6} = \tfrac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad 10^6 \ln(1-q) = -\ln 2.$$

が必要である。q は非常に小さいので $\ln(1-q) \approx -q$ であり、

$$q \approx \frac{\ln 2}{10^6} \approx 6.93 \times 10^{-7}.$$

を得る。

中継局を加える

q は長さの 2 乗に比例するので、長さを半分にすると q は $2^2 = 4$ で割られる。よってケーブルの各半分は、もう一方の半分とは独立に、確率 $q/4$ で桁を反転させる（中継局（booster station）は受信したものをそのまま再送信するだけである）。

> **考えてみよう** 桁が正しく届くのは「両方の半分で正しく伝送される」場合だけだろうか。

そうではない。**両方**の半分で反転した桁は元に戻る。よって

$$\mathrm{P}(\text{桁が正しい}) = \left(1-\frac{q}{4}\right)^2 + \left(\frac{q}{4}\right)^2 = 1 - \frac{q}{2} + \frac{q^2}{8} \approx 1 - \frac{q}{2},$$

である。ただし q^2 のオーダーの項は無視した。（ここでは二重反転はそうした項の一つなので答えには影響しないが、なぜそうなるかを理解しておく価値はある。）メッセージ全体が正しい確率は今度は

$$\left(1-\frac{q}{2}\right)^{10^6}.$$

となる。同じオーダーで $(1-\frac{q}{2})^2 \approx 1-q$ であるから、

$$\left(1-\frac{q}{2}\right)^{10^6} \approx (1-q)^{10^6/2} = \left[(1-q)^{10^6}\right]^{1/2} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707.$$

したがって、中継局によってメッセージが完全に届く確率は $\frac{1}{2}$ から約 0.71 に上がる。ここで q の数値はまったく必要なかったことに注意せよ。元の条件 $(1-q)^{10^6} = \frac{1}{2}$ がすべてを片づけてくれた。$e^{-10^6 q} = \frac{1}{2}$ を用いても同じ考え方で $e^{-10^6 q/2} = 1/\sqrt{2}$ が得られる。

検算

- 長さ 4 のすべての送信メッセージと受信メッセージを（$p_0 = 0.9$、$p_1 = 0.8$ として）厳密に数え上げると、$[(1-\alpha)p_0 + \alpha p_1]^4$ と、α に関する条件の下での条件付き確率

$p_0^4 = 0.6561$ の両方が再現される。

- $(1-q)^{10^6} = \frac{1}{2}$ を厳密に解くと $q = 6.9315 \times 10^{-7}$ となり、有効数字 5 桁で $\ln 2/10^6$ と一致する。
- この q を用いると、中継局がある場合の厳密な確率 $\left[(1-\frac{q}{4})^2 + (\frac{q}{4})^2\right]^{10^6}$ は 0.707107 であり、$1/\sqrt{2}$ と一致する。
- 妥当性の確認：$q_0 = q_1$ ならば条件から $\alpha = \frac{1}{2}$ となり、対称性から当然そうなるべき結果である。

よくある間違い

- 各半分での誤り確率を $q/2$ としてしまう。誤り確率は長さの **2 乗**に比例するので、$q/4$ である。
- 「すべて 0」の部分に $(1-\alpha)^N$ や p_0 だけで答えてしまう。必要なのは各桁の条件付き確率であり、それを 10^k 乗しなければならない。

STEP のその先へ

これは情報理論（information theory）における**二元通信路**である。$q_0 = q_1$ のときは二元対称通信路（binary symmetric channel）であり、雑音のある通信路がどれだけの情報を運べるかについてのシャノン（Shannon）の理論の出発点となる。また誤り訂正符号（error-correcting codes）の出発点でもある。誤り訂正符号は冗長性（redundancy）を付け加えることで、ときおり起こる反転を単に起こりにくくするのではなく、検出して修復できるようにするものである。中継局を用いた計算は 2 段階のマルコフ連鎖（Markov chain）でもあり、反転確率の合成は推移行列（transition matrix）の積で表される。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、条件付き確率とマルコフ連鎖をちょうどよい水準で扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。