解答例

STEP III 1995、第 12 問

確率・統計 ・ 動径対称な確率密度

STEP III 1995、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/95-s3-q12

この問題は、*Beyond STEP* の第 12.22 節「平均をもたない分布」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/cauchy.html

鍵となる考え方

放射対称（radially symmetrical）な確率密度（density）は、原点からの距離 $r = \sqrt{u^2 + v^2}$ を通してのみ (u, v) に依存する。したがって、原点のまわりのどのような回転を施しても同じに見える。特に、原点を頂点とする扇形（sector）に入る確率は、その扇形の中心角だけで決まる。事象 $U/V < k$ は、直線 $u = kv$ と u 軸によって切り取られる向かい合った一対の扇形であるから、その確率は単に角度を 2π で割ったものになる。

解答

同時密度と放射対称性

X と Y はそれぞれ確率密度 $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ をもつ。X と Y は独立（independent）であるから、同時密度（joint density）は周辺密度（marginal densities）の積である：

$$f(x, y) = \phi(x)\,\phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)},$$

これがすべての実数 x, y について成り立ち、示すべきことが示された。

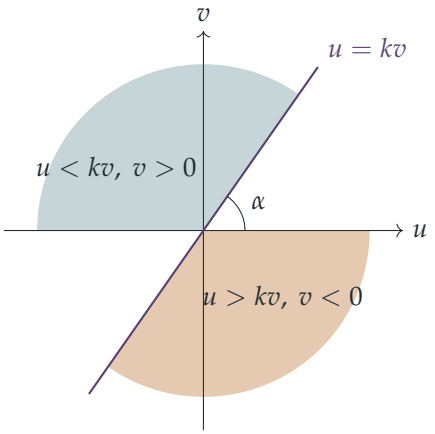
この密度が**放射対称**であるとは、点 (x, y) における値がその点の原点からの距離 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ だけに依存し、方向には依存しないということである。ここでは $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-r^2/2}$ である。同じことであるが、この密度は原点のまわりの平面のどのような回転によっても変わらず、その等高線は原点を中心とする円である。

$\mathrm{P}(U/V < k)$ に関する等式

U と V が放射対称な同時密度 $h(u,v) = \rho\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)$ をもつとする。直線 $v=0$ の確率は 0 である（面積が 0 だからである）ので、$V=0$ の場合は無視してよい。不等式 $U/V < k$ に V を掛け、$V<0$ のときは不等号の向きを逆にすると、

$$\left\{\frac{U}{V} < k\right\} = \{U < kV,\ V>0\} \cup \{U > kV,\ V<0\},$$

となり、右辺の二つの事象は互いに排反である。



図（$k>0$ の場合を描いたもの）が示すように、原点を通る直線 $u=kv$ と u 軸は平面を四つの扇形に分け、影をつけた二つが事象 $U/V < k$ を構成する。写像 $(u,v) \mapsto (-u,-v)$ は原点のまわりの角 π の回転であり、領域 $\{u<kv,\ v>0\}$ をちょうど $\{u>kv,\ v<0\}$ に移す（両方の不等式に -1 を掛ければよい）。放射対称な密度は $h(-u,-v) = h(u,v)$ を満たすので、これら二つの領域の確率は等しい。よって

$$\mathrm{P}\left(\frac{U}{V} < k\right) = 2\,\mathrm{P}(U < kV,\ V>0),$$

となり、これが示すべきことであった。

U/V の確率密度

極座標（polar coordinates）$u = r\cos\theta, v = r\sin\theta$ を用いる。領域 $\{u<kv,\ v>0\}$ は扇形 $\alpha < \theta < \pi$ である。ここで $\alpha \in (0,\pi)$ は半直線 $u=kv, v>0$ が u 軸の正の向きとなす角であり、$\cot\alpha = k$ である。（実際、$0<\theta<\pi$ のとき $\sin\theta>0$ であり、$u<kv$ は $\cot\theta < k$ となる。cot は $(0,\pi)$ で減少するので、これは $\theta > \alpha$ と同値である。）

考えてみよう 関数 ρ がわからないとき、(U,V) が原点を頂点とする中心角 β の扇形に入る確率はいくらか。

極座標では面積要素は $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ であるから、扇形 $\theta_1 < \theta < \theta_1 + \beta$ の確率は

$$\int_{\theta_1}^{\theta_1+\beta} \int_0^\infty \rho(r)\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \beta \int_0^\infty \rho(r)\, r\,\mathrm{d}r = \frac{\beta}{2\pi},$$

である。なぜなら、$\beta = 2\pi$ とすると平面全体となるので $2\pi \int_0^\infty \rho(r)\, r\,\mathrm{d}r = 1$ だからである。言い換えれば、ρ が何であっても、(U, V) の方向は一様に分布する（uniformly distributed）。

いま考えている扇形の中心角は $\pi - \alpha$ であるから、

$$\mathrm{G}(k) = \mathrm{P}\Big(\frac{U}{V} < k\Big) = 2 \cdot \frac{\pi - \alpha}{2\pi} = 1 - \frac{\alpha}{\pi}.$$

$\alpha \in (0, \pi)$ で $\cot\alpha = k$ であるから、$\alpha = \frac{\pi}{2} - \arctan k$ である（$\cot(\frac{\pi}{2} - \psi) = \tan\psi$ より、両辺はともに $(0, \pi)$ に属し、余接が k となるからである）。したがって

$$\mathrm{G}(k) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan k, \qquad -\infty < k < \infty.$$

これは分布関数（distribution function）として当然のように、0 から 1 まで増加する。微分すると U/V の確率密度が得られる：

$$\mathrm{g}(k) = \mathrm{G}'(k) = \frac{1}{\pi(1+k^2)}, \qquad -\infty < k < \infty,$$

これで示すべきことが示された。特に、これは最初の部分の独立な標準正規分布（standard normal）に従う確率変数の比 X/Y にも当てはまる。

検算

- $\mathrm{G}(0) = \frac{1}{2}$：対称性により、$U/V$ が正になる確率と負になる確率は等しい。
- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{\pi(1+k^2)} = \frac{1}{\pi}\big[\arctan k\big]_{-\infty}^{\infty} = 1.$
- 三つの異なる放射対称な分布（独立な二つの標準正規分布、単位円板上の一様分布、e^{-r} に比例する密度）からそれぞれ 2×10^5 個の点を発生させたシミュレーションでは、いずれの場合も $\mathrm{P}(U/V < 0.7) \approx 0.694$ となり、$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan 0.7 \approx 0.6944$ と一致した。また、いくつかの k の値について、等式の両辺は標本誤差の範囲内で一致した。

よくある間違い

- $\{U/V < k\} = \{U < kV\}$ と書いてしまうこと：$V < 0$ のとき、V を掛けると不等号の向きが逆になる。
- 不注意に $\alpha = \arctan(1/k)$ とすること：$k < 0$ のときこれは $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ に属するが、必要な角は $(0, \pi)$ に属する。$\alpha = \frac{\pi}{2} - \arctan k$ と書けば、すべての k について正しい。

STEP のその先へ

密度 $\frac{1}{\pi(1+k^2)}$ は標準**コーシー分布**（Cauchy distribution）である。この分布は平均をもたない（$|k|\,\mathrm{g}(k)$ の積分が発散する）ことで有名であり、そのため大数の法則（law of large numbers）が成り立たない：n 個の独立なコーシー分布に従う確率変数の平均は、そのうちの一つと同じコーシー分布に従うのである。ここでの極座標による議論は、ヤコビアン（Jacobian）を用いた同時密度の変換の最初の一端に触れるものであり、これは大学 1 年次の標準的な手法である。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論の入門書）は、その両方を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。