解答例

STEP III 1995、第 11 問

力学 ・ 相対速度

> **STEP III 1995、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q11

鍵となる考え方

船とともに動く座標系（reference frame）で考える。船から見ると、飛行機は北西方向の直線に沿ってまっすぐ飛び出し、まっすぐ戻ってこなければならない。飛行機は空気に運ばれるので、この座標系での飛行機の速度は、対気速度（airspeed）ベクトルに「流れ」を加えたものになる。ここで流れとは、風の速度から船の速度を引いたものである。この流れがわかれば、行きと帰りのそれぞれは川を横切る問題と同じになる。合成速度（resultant）がその直線に沿うように機首の向きを選び、往復にかかる時間から距離が決まる。

解答

以下では一貫して x 軸を東向き、y 軸を北向きにとり、速さはノット（knots、1 時間あたりの海里）で測る。こうすると距離は海里（nautical miles）で表される。船の速度は $(-V, 0)$ である。空気の速度を $\mathbf{w}$、空気に対する飛行機の速度を $\mathbf{a}$ とし、$|\mathbf{a}| = kV$ とすると、船に対する飛行機の相対速度（relative velocity）は

$$\mathbf{a} + \mathbf{c}, \qquad \mathbf{c} = \mathbf{w} - (-V, 0) = \mathbf{w} + (V, 0).$$

である。飛行機は常に船の北西にいるので、$\mathbf{a} + \mathbf{c}$ は往路では $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$ の向き、復路では $-\mathbf{u}$ の向きでなければならない。

風があるとき：往路の飛行

風は北から南へ吹くので、$\mathbf{w} = (0, -V)$ であり、

$$\mathbf{c} = (V, -V) = -\sqrt{2}\, V\, \mathbf{u}.$$

となる。この流れの速さは $\sqrt{2}\,V$ で、向きはちょうど南東、すなわち哨戒線にぴったり沿っている。したがってパイロットは、機首をそのまま直線の向きに向ければよい。往路（北西向き）では流れに真っ向から逆らって飛び、復路では流れに乗って飛ぶ：

$$\text{往路の速さ} = (k-\sqrt{2})V, \qquad \text{復路の速さ} = (k+\sqrt{2})V.$$

ここで $k > \sqrt{2}$ が必要である。そうでなければ、飛行機は北西方向の直線に沿って船から離れることがまったくできない。

飛行機が船から距離 d_w の地点まで到達し、1 回の往復に $\frac{1}{2}$ 時間かかるとすると、

$$\frac{d_w}{(k-\sqrt{2})V} + \frac{d_w}{(k+\sqrt{2})V} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{d_w}{V} \cdot \frac{2k}{k^2-2} = \frac{1}{2},$$

であるから、

$$d_w = \frac{(k^2-2)V}{4k}.$$

となる。よって往路の飛行時間は

$$\frac{d_w}{(k-\sqrt{2})V} = \frac{k^2-2}{4k(k-\sqrt{2})} = \frac{k+\sqrt{2}}{4k} \text{ 時間} = 15\left(1+\frac{\sqrt{2}}{k}\right) \text{ 分}.$$

である。これは常に 15 分より長いが、往路は流れに逆らって進むのだから当然である。

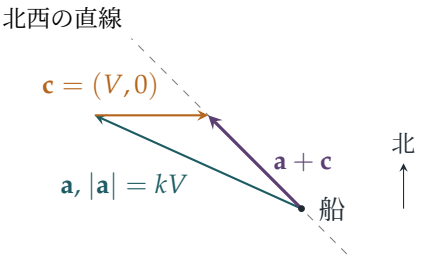
考えてみよう 無風のときも、飛行機の機首を単に北西に向ければよいのではないか。それはなぜだめなのだろうか。

無風のときは、流れはもはや哨戒線に沿っていない。パイロットが機首を北西に向けると、流れの東向きの成分によって飛行機は直線から外れてしまう。機首をわずかに流れに向けて傾ける必要があり、そのぶん対気速度の一部が使われてしまう。

無風のとき

このとき $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ なので $\mathbf{c} = (V, 0)$ である。つまり船から見ると、空気は速さ V で東へ流れている。$\mathbf{c}$ を、$\mathbf{u}$ を用いて直線に沿う成分と、$\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ を用いて直線を横切る成分に分解する：

$$\mathbf{c} = -\frac{V}{\sqrt{2}}\,\mathbf{u} + \frac{V}{\sqrt{2}}\,\mathbf{v}.$$



合成速度は $\mathbf{v}$ 方向の成分をもってはならないので、$\mathbf{a}$ の $\mathbf{v}$ 方向の成分は $-V/\sqrt{2}$ でなければならない。$|\mathbf{a}| = kV$ であるから、進行方向の成分は

$$\sqrt{k^2V^2 - \tfrac{1}{2}V^2} = V\sqrt{k^2 - \tfrac{1}{2}}.$$

となる。直線に沿った方向では、流れの寄与は往路で $-V/\sqrt{2}$、復路で $+V/\sqrt{2}$ である（$\mathbf{c}\cdot(-\mathbf{u}) = V/\sqrt{2}$ だからである）。$A = V\sqrt{k^2 - \frac{1}{2}}$、$B = V/\sqrt{2}$ とおくと、

$$\text{往路の速さ} = A - B, \qquad \text{復路の速さ} = A + B.$$

である。$A^2 - B^2 = V^2(k^2 - 1) > 0$ であるから、往路の速さは正である。

往復にかかる時間が同じく 30 分であるから、

$$\frac{d_c}{A-B} + \frac{d_c}{A+B} = \frac{2A\,d_c}{A^2-B^2} = \frac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad d_c = \frac{A^2-B^2}{4A} = \frac{V(k^2-1)}{4\sqrt{k^2-\frac{1}{2}}}.$$

比

割り算をすると、

$$\frac{d_w}{d_c} = \frac{(k^2-2)V}{4k}\cdot\frac{4\sqrt{k^2-\frac{1}{2}}}{V(k^2-1)} = \frac{(k^2-2)\sqrt{k^2-\frac{1}{2}}}{k(k^2-1)}.$$

$\sqrt{k^2 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{4k^2-2}$ であるから、

$$\frac{d_w}{d_c} = \frac{k^2-2}{2k(k^2-1)}\sqrt{4k^2-2},$$

となり、これが求める結果である。

検算

- $k \to \infty$ のとき、風も船の動きもほとんど影響しなくなる。往路の飛行時間は 15 分に近づき、$d_w/d_c \to 1$ となる（比の分子と分母はどちらも $2k^3$ のように増大する）。

- $k \to \sqrt{2}^{+}$ のとき、風があるときの往路の速さは o に近づくので、$d_w \to 0$ となり、比は $\to 0$ となる。これは公式のとおりである。
- $k = 2$ のとき、往路の飛行時間は $15(1 + 1/\sqrt{2}) \approx 25.6$ 分であり、$d_w/d_c = \frac{2}{12}\sqrt{14} \approx 0.624$ である。機首の向きを直接求める方法と、運動を少しずつ追跡する方法の両方で、この値を数値的に確認した。

よくある間違い

- 風の向きを逆にしてしまう。「北から南へ」の風は南**に向かって**吹く。
- 船の速度を引くべきところで足してしまう。西へ進む船から見ると、静止した空気は**東へ**流れる。
- 無風のときに機首を北西に向け、速さを $kV \pm V/\sqrt{2}$ としてしまう。まず横向きの流れを打ち消さなければならない。

STEP のその先へ

これはガリレイ（Galileo）的な座標系の変換である。互いに等速で動く座標系で測った速度は、一定のベクトルだけ異なる。同じ計算の仕組みが、マイケルソン＝モーリー（Michelson–Morley）の「川を進むボート」の議論の根底にある。そこでは、流れを横切って往復する場合と、流れに沿って往復する場合とで、ここでの計算とまったく同じように所要時間が異なる。そしてこれこそが、特殊相対性理論（special relativity）によって覆された古典的な計算である。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、この精神で相対運動を扱い、続いて相対性理論を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。