解答例

STEP III 1995、第 10 問

力学 ・ 斜面上の放物運動

> **STEP III 1995、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q10

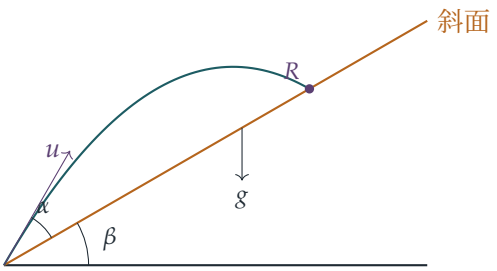
鍵となる考え方

斜面（inclined plane）上では、水平方向と鉛直方向ではなく、斜面に**沿う**方向と斜面に**垂直な**方向に軸をとるのが自然である。この座標軸では重力は 2 つの一定な成分（component）をもち、飛行時間（time of flight）は垂直方向の運動だけから決まり、射程（range）は三角関数の積として表される。この積を積和公式（factor formula）によって正弦の差に直せば、微分を使わなくても最大値が一目でわかる。

解答

設定

砲弾を、空気抵抗（air resistance）を受けずに重力のみのもとで自由に運動する質点（particle）とみなし、斜面の下端から最大傾斜線（line of greatest slope）に沿って斜面の上方へ発射されるものとする。**斜面に対して**角 α で発射されるとすると、水平面からの仰角（angle of elevation）は $\theta = \alpha + \beta$ である。そもそも砲弾が斜面を上っていくためには $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} - \beta$ が必要である。



x 軸を最大傾斜線に沿って上向きに、y 軸を斜面に垂直で斜面から離れる向きにとる。（鉛直下向きの）加速度 g をこれらの方向に分解すると

$$\ddot{x} = -g\sin\beta, \qquad \ddot{y} = -g\cos\beta,$$

であり、初速度の成分は斜面に沿う方向に $u\cos\alpha$、斜面に垂直な方向に $u\sin\alpha$ である。よって時刻 t において

$$x = ut\cos\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2\sin\beta, \qquad y = ut\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2\cos\beta.$$

飛行時間と射程

砲弾が着地するのは、$t > 0$ で再び $y = 0$ となるときであるから

$$T = \frac{2u\sin\alpha}{g\cos\beta}.$$

このとき斜面に沿って進んだ距離は

$$\begin{aligned} R = x(T) &= \frac{2u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g\cos\beta} - \tfrac{1}{2}g\sin\beta\cdot\frac{4u^2\sin^2\alpha}{g^2\cos^2\beta} \\ &= \frac{2u^2\sin\alpha}{g\cos^2\beta}\big(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\big) \\ &= \frac{2u^2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)}{g\cos^2\beta}. \end{aligned}$$

考えてみよう 微分せずに $\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)$ を最大にするにはどうすればよいか。

積和公式 $2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$ に $A = \alpha$、$B = \alpha+\beta$ を代入すると

$$2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta) = \sin(2\alpha+\beta) - \sin\beta,$$

となるので

$$R = \frac{u^2\big(\sin(2\alpha+\beta) - \sin\beta\big)}{g\cos^2\beta}.$$

α に依存するのは $\sin(2\alpha+\beta)$ の項だけであり、その値は 1 以下である。α が $(0, \frac{\pi}{2}-\beta)$ を動くとき、角 $2\alpha+\beta$ は $\frac{\pi}{2}$ を含む区間 $(\beta, \pi-\beta)$ を動く。したがって最大値 1 は実際にとられ、それは $2\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$ のとき、かつそのときに限る。すなわち

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}, \qquad \text{言い換えれば} \qquad \theta = \alpha+\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}.$$

よって大砲は水平面から $\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}$ の角で発射すればよい。つまり、発射方向は斜面と鉛直線のなす角を二等分する。

最大射程

$\sin(2\alpha+\beta)=1$ とし、$\cos^2\beta = 1-\sin^2\beta = (1-\sin\beta)(1+\sin\beta)$ を用いると

$$R_{\max} = \frac{u^2(1-\sin\beta)}{g(1-\sin\beta)(1+\sin\beta)} = \frac{u^2}{g(1+\sin\beta)},$$

となる。ここで $\beta < \frac{\pi}{2}$ であるから、$1-\sin\beta$ で約分してよい。これが求める距離である。

検算

- 平地 $\beta = 0$ の場合：最適な角は 45°、射程は u^2/g となり、よく知られた結果に一致する。
- $\beta \to \frac{\pi}{2}$（鉛直な「斜面」）の場合：最適な方向は真上に近づき、$R_{\max} \to u^2/(2g)$ となる。これは鉛直に打ち上げた砲弾の最高到達高度である。
- 数値的には、$u = 20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、$g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$、$\beta = 30°$ のとき、公式から仰角 60° で $R_{\max} \approx 27.18\,\mathrm{m}$ が得られる。砲弾が斜面を横切るまで水平・鉛直座標で運動を逐次計算すると、ランダムに選んだ u、β、α に対して $R(\alpha)$ が再現され、α について細かく探索すると最大値は $\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}$ でとられる。

よくある間違い

- 水平面からの角と斜面からの角を取り違えること。答えの $\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}$ は水平面から測った角である。
- 斜面に沿う成分 $-g\sin\beta$ を忘れること。そうすると、平地での射程の公式を誤った倍率で拡大したものが得られてしまう。

STEP のその先へ

美しい幾何学的な見方がある。1 点から速さ u で発射されたすべての軌道は、発射点を焦点（focus）とする「安全放物線」（parabola of safety）――これらの軌道の包絡線（envelope）――の内側にあり、任意の斜面上での最大射程は、斜面とこの放物線の交点で与えられる。すると焦点と準線（directrix）の性質から $R_{\max} = u^2/(g(1+\sin\beta))$ が 1 行で得られ、最適な方向が斜面と鉛直線のなす角を二等分する理由も説明できる。ベクトルを用いた放物運動の扱いについては、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）が次に読む本として適している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。