解答例

STEP III 1995、第 1 問

純粋数学 ・ 連立 1 次方程式

> **STEP III 1995、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q1

鍵となる考え方

第 2 式と第 3 式は y と z の項が同じなので、一方から他方を引くと未知数が一度に二つ消え、x だけの方程式が残る。この問題の大部分は、その操作、あるいは後で行う割り算が成り立たなくなる a と b の値を調べることにある。係数の行列式（determinant）を見れば、そのような値がどこにあるかが前もってわかる。そこでまず行列式を計算し、それから例外的な場合を一つずつ扱う。

解答

各方程式に番号をつける。

$$a^2x + ay + z = a^2 \tag{1}$$
$$ax + y + bz = 1 \tag{2}$$
$$a^2bx + y + bz = b. \tag{3}$$

どこで問題が起こりうるか

係数行列（coefficient matrix）の行列式を第 1 行に沿って展開すると、

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ a^2b & 1 & b \end{vmatrix} = a^2(b-b) - a(ab - a^2b^2) + (a - a^2b)$$
$$= a^3b^2 - 2a^2b + a = a(ab-1)^2.$$

したがって、$a = 0$ または $ab = 1$ でない限り、解はちょうど一つである。これらの場合には解が存在しないか無数に存在するかのどちらかであり、どちらであるかを決めるには方程式そのものを調べなければならない。

一般の場合：$a \neq 0$ かつ $ab \neq 1$

(3) から (2) を引くと y と z が消える。

$$(a^2b - a)x = b - 1, \qquad \text{すなわち} \qquad a(ab-1)\,x = b - 1.$$

$a \neq 0$ かつ $ab \neq 1$ であるから両辺を割ることができ、

$$x = \frac{1-b}{a(1-ab)}.$$

を得る。次に、(1) より $z = a^2 - a^2x - ay$ である。これを (2) に代入すると、

$$ax + y + a^2b - a^2bx - aby = 1 \quad \Longrightarrow \quad (1-ab)\,y = (1-a^2b) - ax(1-ab).$$

$1 - ab \neq 0$ で割り、$ax = \dfrac{1-b}{1-ab}$ を用いると、

$$y = \frac{1-a^2b}{1-ab} - \frac{1-b}{1-ab} = \frac{b-a^2b}{1-ab} = \frac{b(1-a^2)}{1-ab}.$$

最後に、

$$\begin{aligned} z = a^2 - a(ax) - ay &= a^2 - \frac{a(1-b)}{1-ab} - \frac{ab(1-a^2)}{1-ab} \\ &= \frac{a^2 - a^3b - a + ab - ab + a^3b}{1-ab} = \frac{a(a-1)}{1-ab}. \end{aligned}$$

よって、$a \neq 0$ かつ $ab \neq 1$ のとき、ただ一つの解は

$$\boxed{x = \frac{1-b}{a(1-ab)}, \qquad y = \frac{b(1-a^2)}{1-ab}, \qquad z = \frac{a(a-1)}{1-ab}.}$$

である。

$a = 0$ の場合

方程式は

$$z = 0, \qquad y + bz = 1, \qquad y + bz = b,$$

となるので、$z = 0$、$y = 1$ であり、最後の式は $1 = b$ を意味する。したがって、

- $a = 0$ かつ $b \neq 1$ ならば、**解は存在しない**。
- $a = 0$ かつ $b = 1$ ならば、解は任意の実数 λ に対して $x = \lambda$、$y = 1$、$z = 0$ である。x はもはやどの方程式にも現れないので、解は直線をなす。

$ab = 1$ の場合（このとき $a \neq 0$）

> **考えてみよう** $ab = 1$ のとき、方程式 $a(ab-1)x = b-1$ の左辺は 0 になる。このことから何がわかるか。

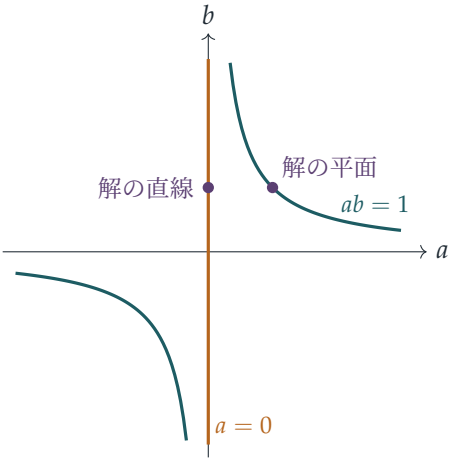
(3) から (2) を引く操作は依然として正しく、その結果は $0 = b-1$ となる。よって $b \neq 1$ ならば、方程式は矛盾する（inconsistent）。$ab = 1$ のもとでは、条件 $b = 1$ から $a = 1$ が従う。したがって、

- $ab = 1$ かつ $a \neq 1$ ならば、**解は存在しない**。
- $a = b = 1$ ならば、三つの方程式はすべて $x + y + z = 1$ となるので、解は任意の実数 λ, μ に対して $x = \lambda$、$y = \mu$、$z = 1 - \lambda - \mu$ である。解は平面全体をなす。

これは行列式に 2 乗の因数 $(ab-1)^2$ が現れることと整合している。$a = b = 1$ では行列の階数（rank）が一気に 1 まで下がるので自由なパラメータが二つあり、一方 $a = 0$、$b = 1$ では階数は 2 なので自由なパラメータは一つしかない。

まとめ

下の図は (a, b) 平面を表している。直線 $a = 0$ と双曲線（hyperbola）$ab = 1$ の上以外では、解はただ一つである。これらの上では、印をつけた二点を除いて解は存在しない。



- $a \neq 0$、$ab \neq 1$：上で枠囲みしたただ一つの解。
- $a = 0$、$b = 1$：$(x, y, z) = (\lambda, 1, 0)$、$\lambda \in \mathbb{R}$。
- $a = b = 1$：$(x, y, z) = (\lambda, \mu, 1 - \lambda - \mu)$、$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$。

- $a = 0$ かつ $b \neq 1$、または $ab = 1$ かつ $a \neq 1$：解なし。

検算

$a = 2$、$b = 3$ とする。公式から $x = \frac{1}{5}$、$y = \frac{9}{5}$、$z = -\frac{2}{5}$ が得られ、実際 $4 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{9}{5} - \frac{2}{5} = 4 = a^2$、$\frac{2}{5} + \frac{9}{5} - \frac{6}{5} = 1$、$\frac{12}{5} + \frac{9}{5} - \frac{6}{5} = 3 = b$ が成り立つ。もう一つの手早い確認として $b = 1$、$a \neq 0, 1$ を考えると、公式から $x = 0$、$y = 1 + a$、$z = -a$ が得られ、これらは三つの方程式をすべて満たす。また、無作為に選んだ 2000 組の (a, b) について、行列式と一般の公式を有理数の厳密な計算で確かめた。

よくある間違い

- $a = 0$ と $ab = 1$ を先に除外せずに $a(ab - 1)$ で割ってしまう。「考えうるすべての値について」とあるのは、特別な場合こそがこの問題の要点だということである。
- 「行列式が 0 だから解なし」と言ってしまう。行列式が 0 であることから否定されるのは解が**ただ一つ**であることだけであり、ここではパラメータの特別な値のうち二つで解が無数に存在する。
- $ab = 1$ と $b = 1$ を合わせると $a = 1$ が従うこと、したがって双曲線上の特別な点が一つだけであることを見落とす。

STEP のその先へ

これは、行列の階数が連立一次方程式（linear system）をどのように支配するかを示す小さな例である。連立方程式が解をもつのは、係数行列と拡大係数行列（augmented matrix）の階数が等しいときであり、かつそのときに限る。そしてそのとき、解全体は次元 3 − 階数 の集合をなす。一点、直線、平面という結果が得られたのはこのためである。ガウスの消去法（Gaussian elimination）を使えばこれらすべてを系統的に扱うことができ、ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は多くの例題とともにこの内容を展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。