解答例

STEP II 1995、第 9 問

力学 ・ 摩擦とつり合い

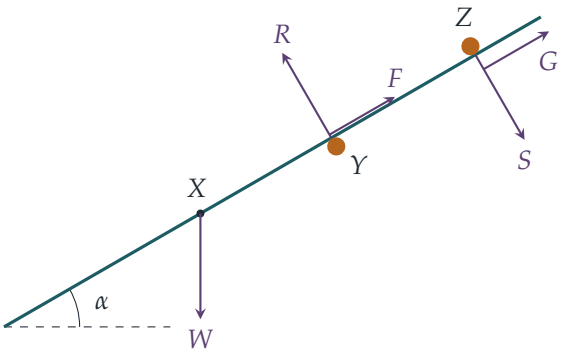
> **STEP II 1995、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s2-q9

鍵となる考え方

棒は最大傾斜線（line of greatest slope）に沿って置かれているので、棒に沿った方向と棒に垂直な方向に力を分解する（resolve）のが自然である。棒が上に載っている横棒は、棒を平面から離れる向きに押し上げる。棒がその下をくぐる横棒は、棒を押し下げることしかできない。Y のまわりのモーメント（moment）を考えると重心がどこになければならないかがわかり、そのうえで μ の最小値は、二つの摩擦力をともに斜面上向きに、限界値（limiting value）で働かせることによって得られる。

解答

棒を重さ W の一様な剛体（rigid body）の棒とし、横棒を固定された細い棒としてモデル化する。各横棒は、棒に垂直な垂直抗力（normal reaction）と棒に沿った摩擦力（friction force）を及ぼす。棒は水平な二本の横棒のどちらにも垂直であるから、それらが定める平面の最大傾斜線に沿っており、したがって水平に対して α だけ傾いている。Y における抗力を R（棒はこの横棒の上に載っているので、棒を平面から離れる向きに押す）、Z における抗力を S（棒はこの横棒の下にあるので、棒を平面に向かって押す）とし、$R, S \geq 0$ とする。Y と Z における摩擦力をそれぞれ F、G とし、斜面上向きを正にとる。



重心はどこになければならないか

棒に垂直な方向に力を分解し、Y のまわりのモーメントを考える（距離は棒に沿って測る）と、

$$R = S + W\cos\alpha,$$
$$S\,d = W\cos\alpha \cdot XY.$$

Y のまわりの S のモーメントは、重力の成分 $W\cos\alpha$ のモーメントとつり合わなければならない。この成分は S と同じく平面に向かう向きに働く。同じ向きの二つの平行な力の Y のまわりのモーメントが打ち消し合えるのは、それらが Y の反対側に働く場合に限られる。Z は Y より斜面の上側にあるから、重心 X は Y の位置かそれより下になければならず、このとき

$$XZ = XY + YZ, \qquad \text{よって} \qquad l = XY + d \geq d.$$

（もし X が Y と Z の間、あるいは Z より先にあれば、モーメントの式から $S < 0$ となってしまう。つまり Z の横棒が棒を引っ張らなければならないが、それは不可能であり、棒は回転してそこから外れてしまう。）等号 $l = d$ は境界の場合であり、このとき X は Y の位置にあって $S = 0$ である。

考えてみよう 問題文には $l \leq d$ とある。なぜ逆向きの不等式が得られるのだろうか。

問題文の不等式は誤植である。実際、問題はこのあと $l = 2d$ とおいているが、これは $l \geq d$ でなければ不可能である。上の議論により、釣り合い（equilibrium）に必要なのは $l \geq d$ であることがわかるので、こちらを用いる。

μ の最小値

$XY = l - d$ とすると、二つの式から

$$S = \frac{W\cos\alpha\,(l-d)}{d}, \qquad R = \frac{W\cos\alpha\,l}{d}, \qquad \text{よって} \qquad R+S = \frac{W\cos\alpha\,(2l-d)}{d}.$$

棒に沿った方向に力を分解すると、摩擦力が重力の斜面下向きの成分を支えなければならないので

$$F + G = W\sin\alpha.$$

摩擦の法則から $|F| \le \mu R$ かつ $|G| \le \mu S$ でなければならず、したがって $F+G \le \mu(R+S)$ である。ゆえに釣り合いのためには

$$W\sin\alpha \le \mu\,\frac{W\cos\alpha\,(2l-d)}{d}, \qquad \text{すなわち} \qquad \mu \ge \frac{d\tan\alpha}{2l-d}.$$

が必要である。逆に、μ がこの値に等しければ、$F = \mu R$、$G = \mu S$（どちらも斜面上向きで、どちらも限界値）とするとすべての式が満たされるので、棒は釣り合いの状態にありうる。したがって最小値は

$$\mu_{\min} = \frac{d\tan\alpha}{2l-d}.$$

である。

$l = 2d$ のとき、これは $\mu_{\min} = \dfrac{d\tan\alpha}{3d} = \frac{1}{3}\tan\alpha$ となるので、求めるとおり $\mu \ge \frac{1}{3}\tan\alpha$ である。

検算

- $l = d$ のとき、重心は下側の横棒の上にあり、$S = 0$ で、$\mu \ge \tan\alpha$ が得られる。これは粗い斜面上に静止する一つの質点についてのおなじみの条件である。
- $l \to \infty$ とすると抗力は限りなく大きくなるので、必要な摩擦はごくわずかになり、実際 $\mu_{\min} \to 0$ となる。
- 数値的には、$\alpha = 0.7$、$l = 2d$ のとき公式は $0.28076\ldots$ を与え、これは $\frac{1}{3}\tan 0.7$ に等しい。また、コンピュータを用いて、力の式とランダムに選んだ点のまわりのモーメントの式を確かめ、$\mu_{\min}$ よりわずかに大きいときには釣り合いが成り立ち、わずかに小さいときには成り立たないことも確認した。

よくある間違い

- 二つの抗力を同じ向きにとってしまうこと。棒がその下にある横棒は、棒を平面に向かって押すことしかできない。

- 一方の横棒でだけ摩擦が限界に達していると仮定してしまうこと。μ をできるだけ小さくするには、両方の横棒が斜面上向きに最大限の摩擦力を出さなければならない。

STEP のその先へ

これは不等式制約をともなう静力学（statics）の小さな問題である。接触力は線形方程式と摩擦の不等式を同時に満たさなければならず、μ の最小値は、実行可能集合（feasible set）がちょうど空でなくなる点である。線形方程式と線形不等式の組合せという同じ構造は、線形計画法（linear programming）や、工学における摩擦接触の解析の基礎にもなっている。剛体の静力学と摩擦についてさらに学ぶには、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。