解答例

STEP II 1995、第 8 問

純粋数学 ・ ロジスティック微分方程式

> **STEP II 1995、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s2-q8

この問題は、*Beyond STEP* の第 8.3 節「**個体群の収穫**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch08/harvesting.html

鍵となる考え方

この成長法則はロジスティック方程式（logistic equation）であり、変数分離形（separable）である。部分分数（partial fractions）に分解すると、積分は二つの対数になる。後半では、新しい右辺を平方完成（completing the square）すると、ずらし $y = x - K + \alpha$ によって新しい方程式が、K を α に置き換えた**まったく同じ**ロジスティック方程式に変わることがわかる。したがって、改めて積分をしなくても前半の答えをそのまま使い回せる。

解答

取り除きがない場合の個体数

$K > 0$ とする（$x = K$ から始まる個体数なので $K > 0$ でなければならない）。方程式は

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (2K - x)x.$$

である。$x = K$ から出発すると、変化率は $K^2 > 0$ である。解が $x = 0$ や $x = 2K$ に達することはない。これらの定数関数はそれ自体が解であり、この方程式の解どうしは交差しないからである。よって常に $0 < x < 2K$ であり、$(2K - x)x$ で割ってよい。部分分数に分解すると

$$\frac{1}{x(2K - x)} = \frac{1}{2K}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2K - x}\right),$$

となるので、変数を分離して

$$\frac{1}{2K}\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2K-x}\right)\mathrm{d}x=\int\mathrm{d}t,$$
$$\frac{1}{2K}\Big(\ln x-\ln(2K-x)\Big)=t+C.$$

を得る。x と $2K-x$ はともに正なので、絶対値記号は必要ない。$t=0$ では $x=2K-x=K$ であるから、左辺は 0 となり $C=0$ である。したがって

$$\ln\frac{x}{2K-x}=2Kt\quad\Longrightarrow\quad x=(2K-x)\,\mathrm{e}^{2Kt}\quad\Longrightarrow\quad x=\frac{2K\mathrm{e}^{2Kt}}{1+\mathrm{e}^{2Kt}}=\frac{2K}{1+\mathrm{e}^{-2Kt}}.$$

求められている形に合わせるため、$2=(1+\mathrm{e}^{-2Kt})+(1-\mathrm{e}^{-2Kt})$ と書くと

$$x(t)=\frac{K(1+\mathrm{e}^{-2Kt})+K(1-\mathrm{e}^{-2Kt})}{1+\mathrm{e}^{-2Kt}}=K+K\,\frac{1-\mathrm{e}^{-2Kt}}{1+\mathrm{e}^{-2Kt}},$$

となり、これが示すべき結果である。（同値な表し方として $x=K+K\tanh Kt$ がある。）

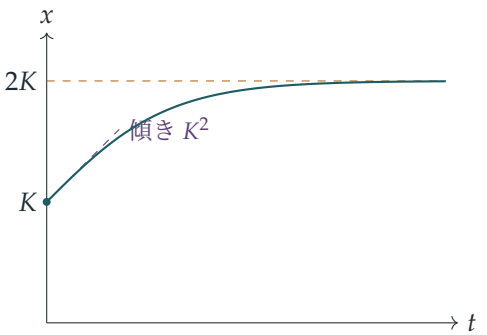
概形。 $t\geq 0$ では $\mathrm{e}^{-2Kt}\in(0,1]$ なので、$K\leq x<2K$ である。すると $\dot{x}=(2K-x)x>0$ であるから、x は増加する。方程式をもう一度微分すると

$$\ddot{x}=(2K-2x)\,\dot{x}\leq 0\quad\text{なぜなら}x\geq K,$$

となるので、グラフは上に凸（concave）であり、$t=0$ での傾きは K^2 である（そこでは $\ddot{x}=0$ であり、時刻の原点は、S 字型をしたロジスティック曲線全体の変曲点（point of inflection）にあたる）。$t\to\infty$ のとき $\mathrm{e}^{-2Kt}\to 0$ であるから

$$x(t)\to 2K.$$

となる。個体数は $2K$ で頭打ちになり、下から近づくが、決して到達しない。



割合 L で取り除く場合

1 時間あたり L マイクログラムを取り除くと、変化率から L が引かれる：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (2K - x)x - L.$$

右辺を平方完成すると

$$(2K - x)x - L = -(x^2 - 2Kx) - L = K^2 - L - (x - K)^2 = \alpha^2 - (x - K)^2,$$

となる。ここで $K^2 > L$ であるから $\alpha = \sqrt{K^2 - L} > 0$ である。

> **考えてみよう** なぜ $y = x - K + \alpha$ が適切な置換なのだろうか？

右辺 $\alpha^2 - (x - K)^2$ は $x = K \pm \alpha$ で 0 になる。これが二つの平衡（equilibrium）個体数である。$K - \alpha$ だけずらすと下側の平衡点が 0 に移り、これはもとのロジスティック方程式で下側の平衡点があった位置でもある。$x - K = y - \alpha$ かつ $\dot{y} = \dot{x}$ であるから

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \alpha^2 - (y - \alpha)^2 = 2\alpha y - y^2 = (2\alpha - y)\, y.$$

これは最初の方程式で K を α に置き換えたものである。初期条件も対応している。$x(0) = K$ から $y(0) = \alpha$ となり、これは $x(0) = K$ の類似である。$\alpha > 0$ なので前半の議論が一字一句そのまま適用でき

$$y(t) = \frac{2\alpha}{1 + \mathrm{e}^{-2\alpha t}}, \qquad \text{よって} \qquad x(t) = K - \alpha + \frac{2\alpha}{1 + \mathrm{e}^{-2\alpha t}}.$$

となる。$t \to \infty$ のとき $\mathrm{e}^{-2\alpha t} \to 0$ であるから $y \to 2\alpha$ となり

$$x(t) \to K - \alpha + 2\alpha = K + \alpha,$$

が示された。$L > 0$ のときは $\alpha < K$ であるから、取り除きを受ける個体数は、予想どおりより低い水準 $K + \alpha < 2K$ に落ち着く。

検算

- $t = 0$ では、どちらの式も $x = K$ を与える。$L = 0$ とおくと $\alpha = K$ となり、二つ目の式は一つ目の式 $2K/(1 + \mathrm{e}^{-2Kt})$ に帰着する。
- $x = K + K\tanh Kt$ を微分すると $\dot{x} = K^2 \operatorname{sech}^2 Kt = K^2(1 - \tanh^2 Kt) = (K - K\tanh Kt)(K + K\tanh Kt) = (2K - x)x$ となる。
- 数値的には、$K = 1$ のとき $x(1) = 2/(1 + \mathrm{e}^{-2}) \approx 1.7616$ であり、$K = 1$ かつ $L = 0.75$（したがって $\alpha = \frac{1}{2}$）のとき $x(1) \approx 1.2311$ である。どちらも微分方程式を直接数値的に（ルンゲ＝クッタ（Runge–Kutta）法で）解いた結果と一致し、二つ目は $1.5 = K + \alpha$ に落ち着く。

よくある間違い

- 部分分数分解で因子 $\frac{1}{2K}$ を落としてしまい、e^{-2Kt} の代わりに e^{-t} を得てしまう。
- 後半で $+L$ と書いてしまう、あるいは積分定数を改めて求めなければならないことを忘れる。ここでは置換によって $y(0) = \alpha$ となるので、新たな定数は必要ない。

STEP のその先へ

後半は**平衡点の安定性**（stability of equilibria）への最初の入り口である。方程式 $\dot{x} = \alpha^2 - (x - K)^2$ は $K \pm \alpha$ に平衡点をもつ。上側の平衡点は近くの解を引き寄せ、下側の平衡点は近くの解を遠ざける。このことは、何も解かなくても右辺の符号から読み取れる。この相直線（phase line）による方法や、$L > K^2$ の場合に何が起こるか（平衡点が存在せず、個体数は有限時間で絶滅する）については、Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations* で扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。