解答例

STEP II 1995、第 7 問

純粋数学 • ヘロンの公式

> **STEP II 1995、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s2-q7

鍵となる考え方

全体を通して主役となるのは内接円（incircle）である。内接円の中心から接点（point of contact）へ引いた半径は各辺に垂直なので、ABC を敷き詰める三つの小さな三角形の高さがそのまま得られ、これにより (i) が示される。小問 (ii) はヘロン（Heron）の公式（Heron's formula）の古典的な導出である。$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ と書き、余弦定理（cosine rule）を用いて角を消去し、さらに平方の差（difference of two squares）による因数分解を 2 回行う。球については、鉛直な断面（cross-section）を考える。球と穴の縁との接点は、ちょうど内接円が各辺に接する点になっていることがわかる。

解答

小問 (i)

内接円が BC、CA、AB に接する点をそれぞれ P、Q、R' とする。接点へ引いた半径は接線（tangent）に垂直であるから、$IP \perp BC$、$IQ \perp CA$、$IR' \perp AB$ であり、これらの長さはいずれも r である。したがって三角形 BIC は底辺 a、高さ r をもち、他の二つも同様である：

$$[BIC] = \tfrac{1}{2}ar, \qquad [CIA] = \tfrac{1}{2}br, \qquad [AIB] = \tfrac{1}{2}cr.$$

I は三角形の内部にあるので、これら三つの三角形は重なりなくぴったり合わさって ABC をなす。足し合わせると

$$\Delta = \tfrac{1}{2}r(a+b+c) = rs,$$

となり、示すべき式が得られる。

小問 (ii)

$\Delta = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$ を 2 乗し、$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ を用いると

$$\Delta^2 = \tfrac{1}{4}b^2c^2(1-\cos^2\alpha) = \tfrac{1}{16}[4b^2c^2 - (2bc\cos\alpha)^2],$$

となり、これが一つ目の結果である。括弧の中は平方の差であるから

$$16\Delta^2 = (2bc - 2bc\cos\alpha)(2bc + 2bc\cos\alpha).$$

余弦定理より $2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2$ である。これを各因数に代入すると

$$2bc - 2bc\cos\alpha = a^2 - (b^2 - 2bc + c^2) = a^2 - (b-c)^2,$$
$$2bc + 2bc\cos\alpha = (b^2 + 2bc + c^2) - a^2 = (b+c)^2 - a^2,$$

よって

$$\Delta^2 = \tfrac{1}{16}[a^2 - (b-c)^2][(b+c)^2 - a^2],$$

となり、これが二つ目の結果である。各括弧はふたたび平方の差であるから

$$16\Delta^2 = (a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a).$$

ここで s を導入する。$a+b+c = 2s$ であるから

$$b+c-a = 2(s-a), \qquad a-b+c = 2(s-b), \qquad a+b-c = 2(s-c),$$

となり、積は $2s\cdot 2(s-a)\cdot 2(s-b)\cdot 2(s-c) = 16\,s(s-a)(s-b)(s-c)$ である。したがって $\Delta^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$ である。$\Delta > 0$ であるから正の平方根をとって

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

小問 (iii)

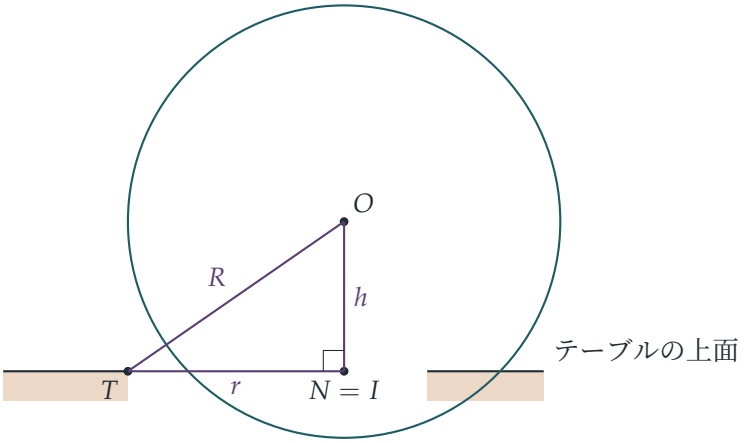
球（sphere）の中心を O、テーブルの上面からの高さを h とする。O からテーブルの平面に下ろした垂線の足を N とすると、$ON = h$ である。球は穴の三つの縁の上に載っている。球が縁 BC に点 T で接するとする。

考えてみよう なぜ N は内心 I でなければならないのか？

球が直線に接する点では、半径はその直線に垂直であるから、$OT \perp BC$ かつ $OT = R$ である。また ON はテーブルの平面全体に垂直であるから、$ON \perp BC$ である。よって BC は平面 ONT 内の平行でない 2 直線に垂直であり、したがってその平面に垂直で、特に NT に垂直である。ゆえに NT は N から BC までの距離であり、直角三角形 ONT に三平方の定理（Pythagoras' theorem）を用いると

$$NT^2 = R^2 - h^2.$$

縁 CA、AB についても同じ議論により、N は三辺のいずれからも等しい距離 $\sqrt{R^2-h^2}$ にあることがわかる。点 N は三角形の内部にあり（球は穴の上にはまっている）、三角形の内部で三辺から等距離にある点は内心（incentre）だけである。よって $N=I$ であり、共通の距離は r で、接点はちょうど内接円が各辺に接する点である。これらの点は辺の延長上ではなく辺そのものの上にあるので、球はたしかに三つの縁の上に載っている。



図は O と T を通る鉛直な断面を示している。縁 BC は紙面に垂直に T を通る。三角形 ONT に三平方の定理を用いると $h^2=R^2-r^2$ が得られる。(i) と (ii) より

$$r=\frac{\Delta}{s}=\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s},\qquad \text{よって}\qquad r^2=\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}.$$

したがって、球の中心はテーブルの上面から

$$h=\sqrt{R^2-\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

の高さにある。これには $R>r$ が必要である。内接円より大きくない球は、穴をそのまま通り抜けて落ちてしまう。

検算

3–4–5 の三角形を考える。$s=6$ であり、ヘロンの公式から $\Delta=\sqrt{6\cdot3\cdot2\cdot1}=6$ となり、$\frac{1}{2}\cdot3\cdot4$ と一致する。すると $r=\Delta/s=1$ であり、これは直角三角形の公式 $r=\frac{1}{2}(3+4-5)$ からも確かめられる。$R=2$ のとき、公式から $h=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}\approx1.732$ となる。$R\to r^+$ のとき $h\to0$ である。すなわち球は赤道がテーブルと同じ高さになるまで沈み、内接円の上に載る。より広い検算として、ランダムな三角形 18,816 個について数値的に確かめた。いずれの場合も、内心の真上の高さ h に置いた中心は三つの縁を含む直線のすべてからちょうど距離 R にあり、最も近い点は縁の内部にあった。

よくある間違い

- d を I から頂点までの距離として $h = \sqrt{R^2 - d^2}$ とすること。球が接するのは縁であって、角ではない。
- 中心が内心の真上にあることを根拠なく仮定すること。垂直性の議論、あるいは少なくとも明確な対称性による理由が必要である。
- (ii) で因数の組を取り違えること。$b + c - a = 2(s - a)$ であり、$2(s - b)$ や $2(s - c)$ ではない。

STEP のその先へ

ヘロンの公式は、面積や体積を表す対称な公式の一族に属している。ブラーマグプタ（Brahmagupta）の公式は円に内接する四角形（cyclic quadrilateral）に対して同じ役割を果たし、ケイリー（Cayley）・メンガー（Menger）の行列式（Cayley–Menger determinant）は四面体（tetrahedron）の体積を 6 本の辺の長さから与える。「半径 $\perp$ 接線、ゆえに垂線の足は内心である」という段階は、三垂線の定理（theorem of the three perpendiculars）の 3 次元版であり、ベクトルを用いた幾何で知っておく価値がある。この種の問題をさらに多く知りたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。