解答例

STEP II 1995、第 6 問

純粋数学 • 1 の冪根

> **STEP II 1995、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s2-q6

鍵となる考え方

1 の 7 乗根（seventh roots of unity）は $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^6$ であり、それらの和は 0 である。実数でない 6 つを 3 つずつの 2 組 $\{\alpha, \alpha^2, \alpha^4\}$ と $\{\alpha^3, \alpha^5, \alpha^6\}$ に分ける。2 つ目の組は 1 つ目の組の共役複素数（complex conjugate）をちょうど集めたものなので、2 つの組の和は互いに共役である。したがってそれらの和と積は実数であり、前半の結果によってそれらが 2 次方程式の係数となる。そのうえで解の実部と虚部をとれば、三角関数の和が得られる。

解答

解と係数

u と v が $z^2 + az + b = 0$ の解であるとき、最高次の係数が 1 である 2 次式 $z^2 + az + b$ は因数 $z - u$ と $z - v$ をもつので、すべての z に対して

$$z^2 + az + b = (z - u)(z - v) = z^2 - (u + v)z + uv$$

が成り立つ。z の係数と定数項を比較すると $a = -u - v$、$b = uv$ が得られ、示すべきことが示された。

1 の累乗根

まず注意しておく。問題文には $z^6 - 1 = 0$ とあるが、これは $z^7 - 1 = 0$ の誤植である。実際、$\alpha^6 = \cos(12\pi/7) + \mathrm{i}\sin(12\pi/7) \neq 1$ であり、一方で問題の残りの部分は明らかに 7 等分に関するものである。以下では $z^7 - 1 = 0$ を扱う。

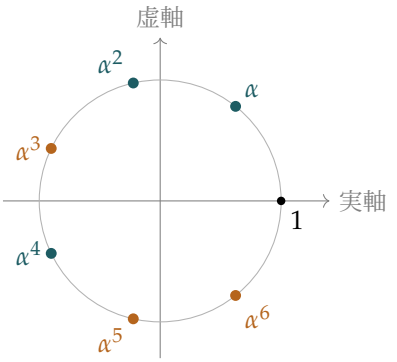
ド・モアブルの定理（de Moivre's theorem）により

$$\alpha^7 = \cos 2\pi + \mathrm{i}\sin 2\pi = 1,$$

であるから、α は $z^7 - 1 = 0$ の解である。より一般に、$\alpha^k = \cos(2k\pi/7) + \mathrm{i}\sin(2k\pi/7)$ であり $(\alpha^k)^7 = (\alpha^7)^k = 1$ である。7 つの数

$$1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4,\ \alpha^5,\ \alpha^6$$

は相異なる。$k = 0, \ldots, 6$ に対する偏角 $2k\pi/7$ が $[0, 2\pi)$ の中で相異なるからである。7 次の多項式の解は高々 7 個なので、これらが $z^7 - 1 = 0$ の解のすべてである。これらは単位円上の正七角形の頂点に位置している。



すべての議論を支えるのは 2 つの事実である。第一に、解の和は 0 である。$z^7 - 1 = (z-1)(z^6 + z^5 + \cdots + z + 1)$ であり $\alpha \neq 1$ なので

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6 = 0. \qquad (*)$$

（同じことだが、$z^7 - 1$ における z^6 の係数が 0 であることからもわかる。）第二に、$|\alpha| = 1$ なので $\overline{\alpha^k} = \alpha^{-k} = \alpha^{7-k}$ である。よって $\alpha^6 = \overline{\alpha}$、$\alpha^5 = \overline{\alpha^2}$、$\alpha^3 = \overline{\alpha^4}$ である。

A と B を求める

$$p = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4, \qquad q = \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^6.$$

とおく。上で見た共役の組により $q = \overline{p}$ である。これがもう 1 つの解として自然に予想されるものである。実数係数の 2 次方程式が実数でない解 p をもつならば、$\overline{p}$ も解でなければならないからである。

? **考えてみよう** p が実数でないことはどうしてわかるのか。もし実数であれば、「もう 1 つの解」が $\overline{p}$ である必要はない。

p の虚部は $\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}$ であり、これが正であることを最後に示す。よって p は実数ではなく、解は p と $\overline{p}=q$ である。（いずれにせよ、p と q を解とする実数 A と B が見つかれば、2 次方程式は決まる。）

$(*)$ により

$$p+q=\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6=-1.$$

積については、展開してから $\alpha^7=1$ を用いて次数を下げる。

$$\begin{aligned}pq&=(\alpha+\alpha^2+\alpha^4)(\alpha^3+\alpha^5+\alpha^6)\\&=\alpha^4+\alpha^6+\alpha^7+\alpha^5+\alpha^7+\alpha^8+\alpha^7+\alpha^9+\alpha^{10}\\&=\alpha^4+\alpha^6+1+\alpha^5+1+\alpha+1+\alpha^2+\alpha^3\\&=3+(\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6)=3-1=2.\end{aligned}$$

9 つの項の中には、3 つの 1 のほかに $\alpha,\dots,\alpha^6$ がそれぞれちょうど 1 回ずつ現れていることに注意しよう。前半の結果より $A=-(p+q)$、$B=pq$ なので

$$A=1,\qquad B=2,$$

であり、p と q は $z^2+z+2=0$ の解、すなわち

$$z=\frac{-1\pm\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}.$$

である。

三角関数の和

$\alpha^k=\cos(2k\pi/7)+\mathrm{i}\sin(2k\pi/7)$ を用いて $p=\alpha+\alpha^2+\alpha^4$ の実部と虚部をとると

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}p&=\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7},\\\operatorname{Im}p&=\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}.\end{aligned}$$

となる。$z^2+z+2=0$ の 2 つの解はどちらも実部が $-\frac{1}{2}$ なので

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}=-\frac{1}{2},$$

となり、示すべきことが示された。（別の方法として、$p+\overline{p}=-1$ から直接 $2\operatorname{Re}p=-1$ が得られる。）

虚部は $\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$ であり、どちらであるかを決めなければならない。

考えてみよう 3 つの正弦のうち 2 つは正で 1 つは負である。どちらが勝つかをどうすれば確かめられるか。

負の項を正の項の 1 つと比べる。$\frac{8\pi}{7} = \pi + \frac{\pi}{7}$ なので $\sin\frac{8\pi}{7} = -\sin\frac{\pi}{7}$ である。また $\sin\frac{4\pi}{7} = \sin\left(\pi - \frac{4\pi}{7}\right) = \sin\frac{3\pi}{7}$ である。正弦関数は $[0, \frac{\pi}{2}]$ で狭義単調増加であり、$0 < \frac{\pi}{7} < \frac{3\pi}{7} < \frac{\pi}{2}$ なので $\sin\frac{3\pi}{7} > \sin\frac{\pi}{7}$ である。したがって

$$\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} = \underbrace{\sin\frac{2\pi}{7}}_{>0} + \underbrace{\left(\sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\right)}_{>0} > 0,$$

であり、ゆえに

$$\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

である。これにより、上で用いたように $p = \frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$ が実数でないことも確かめられる。

検算

電卓で（ラジアンで）計算すると、$\cos\frac{2\pi}{7} \approx 0.6235$、$\cos\frac{4\pi}{7} \approx -0.2225$、$\cos\frac{8\pi}{7} \approx -0.9010$ であり、和は -0.5000 となる。正弦はおよそ 0.7818、0.9749、-0.4339 であり、和は 1.3229 となる。これは $\frac{\sqrt{7}}{2} \approx 1.3229$ と一致する。$p^2 + p + 2 = 0$ を直接確かめることもできる。$p = \frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$ のとき $p^2 = \frac{-6-2\mathrm{i}\sqrt{7}}{4}$ であり、ここから $p^2 + p + 2 = 0$ が従う。

よくある間違い

- 印刷されたとおりに $z^6 - 1 = 0$ を用いること。その場合 α は解ではなく、和が 0 になるという事実 $(*)$ も成り立たない。
- pq を展開するときに $\alpha^7 = 1$ を用いて次数を下げるのを忘れること、あるいは 1 に等しい 3 つの項を数え間違えること。
- 「2 つの項が正だから」という理由で正弦の和が正であると主張すること。$\sin\frac{3\pi}{7} > \sin\frac{\pi}{7}$ のような比較が必要である。

STEP のその先へ

$\{1,2,4\}$ と $\{3,5,6\}$ への分け方は恣意的なものではない。1, 2, 4 は 7 を法とする 0 でない平方数（すなわち平方剰余（quadratic residue））であり、$2p + 1 = \mathrm{i}\sqrt{7}$ は**ガウス和**（Gauss sum）である。ガウス（Gauss）は、$4k + 3$ の形の素数 ℓ に対して、平方剰余

r にわたる α^r の和が $\frac{-1+i\sqrt{\ell}}{2}$ となることを示した。これは、定規とコンパスでどの正多角形が作図できるかという理論（ガロア理論（Galois theory））と、平方剰余の相互法則（quadratic reciprocity）への第一歩である。Davenport の *The Higher Arithmetic*（初等整数論の入門書）は平方剰余を扱っており、Needham の *Visual Complex Analysis*（図で見る複素解析）は 1 の累乗根を幾何学的な視点から解説している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。