解答例

STEP II 1995、第 5 問

純粋数学 • 最適化と凹性

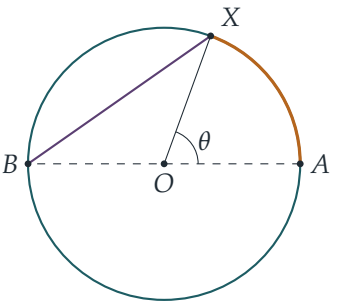
> **STEP II 1995、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s2-q5

鍵となる考え方

選択肢 (i) と (iii) は、(ii) の族の両端にあたる。$\theta \to 0$ はまっすぐ泳いで横切ることを、$\theta \to \pi$ は最後まで走ることを意味する。そこで、所要時間の合計を $[0, \pi]$ 上の θ の関数として表し、その最小値がどこでとられるかを調べる。意外なことに、この関数は凹関数（concave）であり、ただ一つの停留点（stationary point）は極大（maximum）となる。したがって最良の経路は常に端点のどちらかである。

解答

プールの半径を長さの単位 1 とし、彼女の泳ぐ速さを 1 とする。すると走る速さは k である。時間の単位は（半径）/（泳ぐ速さ）となるが、これはどの比較にも影響しない。



三つの所要時間

(i) 長さ 2 の直径（diameter）AB を泳ぐので、所要時間は 2 である。

(iii) 長さ π の半円（semicircle）を走るので、所要時間は π/k である。

(ii) 長さ θ（半径 1）の弧（arc）AX を時間 θ/k で走る。$\angle AOB = \pi$ であるから、$\angle XOB = \pi - \theta$ である。三角形 XOB は $OX = OB = 1$ の二等辺三角形（isosceles triangle）であるから、弦（chord）の長さは

$$XB = 2\sin\tfrac{\pi-\theta}{2} = 2\cos\tfrac{\theta}{2}.$$

である。（同じことであるが、AB は直径なので $\angle AXB = \frac{\pi}{2}$ であり、二等辺三角形 AOX から $\angle XAB = \frac{\pi-\theta}{2}$ であるので、$XB = 2\sin\angle XAB$ となる。）所要時間の合計は

$$T(\theta) = \frac{\theta}{k} + 2\cos\frac{\theta}{2}, \qquad 0 < \theta < \pi.$$

である。この式は端点でも意味をもつ。$T(0) = 2$ は (i) の所要時間であり、$T(\pi) = \pi/k$ は (iii) の所要時間である。したがって、三つの選択肢はすべて $[0, \pi]$ 上の一つの連続関数で記述される。

T が最小となるのはどこか

微分すると

$$T'(\theta) = \frac{1}{k} - \sin\frac{\theta}{2}, \qquad T''(\theta) = -\tfrac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}.$$

となる。$0 < \theta < \pi$ のとき $0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$ であるから、$\cos\frac{\theta}{2} > 0$ かつ $T''(\theta) < 0$ である。すなわち、関数 T は $[0, \pi]$ 上で狭義凹（strictly concave）である。

> **考えてみよう** $k > 1$ ならば、$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{k}$ となる点に停留点がある。そこが飛び込むのに最良の場所ではないのか？

そうではない。そこでは $T'' < 0$ であるから、それは**極大**であり、飛び込むのに最悪の場所である。より一般に、閉区間上の狭義凹関数は、両端の値を結ぶ線分よりも真に上にある。したがって $0 < \theta < \pi$ を満たすすべての θ に対して

$$T(\theta) > \Big(1 - \frac{\theta}{\pi}\Big)T(0) + \frac{\theta}{\pi}\,T(\pi) \geq \min(T(0), T(\pi)).$$

が成り立つ。よって k の値が何であっても、X を内部にとる選択は、(i) と (iii) のうちよい方と同じ速さにすら決してならない。（$k \leq 1$ のときは、さらに直接的にわかる。このとき $\sin\frac{\theta}{2} < 1 \leq \frac{1}{k}$ であるから $(0, \pi)$ 上で $T'(\theta) > 0$ となり、T は増加関数である。したがって、すぐに泳ぎ出すのが最良である。）

(i) と (iii) の比較

残るは $T(0) = 2$ と $T(\pi) = \pi/k$ の比較である。

- $k < \frac{\pi}{2}$ ならば $\pi/k > 2$ であるから、彼女は**まっすぐ泳ぐ**べきである。これは選択肢 (i) である。
- $k > \frac{\pi}{2}$ ならば $\pi/k < 2$ であるから、彼女は**最後まで走って回る**べきである。これは選択肢 (iii) である。
- $k = \frac{\pi}{2}$ ならば、(i) と (iii) の所要時間は等しく、どちらも最良である。

物理的な理由は単純で、半円の長さが直径の $\frac{\pi}{2}$ 倍だからである。

最後に、選択肢 (ii) は彼女が決して選ばないものである。すべての $k > 0$ とすべての $\theta \in (0, \pi)$ に対して、(ii) は (i) と (iii) のうちよい方よりも真に遅い。

検算

$k = 3$ のとき、走ると $\pi/3 \approx 1.047$ かかり、泳ぐ場合の 2 に勝つ。停留点は $\theta = 2\arcsin\frac{1}{3} \approx 0.680$ にあり、そこで $T \approx 2.112$ となる。これはどちらの端点よりも遅く、極大として当然の結果である。e^{-4} から e^{4} までの数千個の無作為な k について、細かい θ の格子上で T を計算機で評価したところ、内部の値が $\min(2, \pi/k)$ を下回ることは一度もなく、切り替わりが $k = \pi/2 \approx 1.571$ で起こることも確認された。

よくある間違い

- $T'(\theta) = 0$ とおき、その性質を確かめないまま、得られた点を最適解だと宣言してしまう。ここではそれは極大である。
- 弦の代わりに弧 XB を用いてしまう。あるいは弦の長さを $2\sin\frac{\theta}{2}$ としてしまう（それは XB ではなく AX である）。
- 停留点がまったく存在しない $k \le 1$ の場合を忘れる。

STEP のその先へ

ここで働いている原理は、区間上の凹関数はその最小値を端点でとる、というものである。高次元では、これは多角形上の線形（あるいは凹）な目的関数は頂点で最小となる、という事実になり、線形計画法（linear programming）の基礎をなしている。この問題はまた、スネルの法則（Snell's law）やフェルマー（Fermat）の最小時間の原理（principle of least time）の親戚でもある。そちらでは時間の関数が逆に凸（convex）であるため、答えはふつう内部の点になる。この種の問題をさらに解きたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* に挑戦するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。