解答例

STEP II 1995、第 4 問

純粋数学 • ウォリスの漸化式

> **STEP II 1995、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s2-q4

この問題は、*Beyond STEP* の第 4.4 節「ウォリス、ベータ、そして二分の一の階乗」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch04/wallis-beta.html

鍵となる考え方

部分積分（integration by parts）によって $\cos^2 t$ を $1-\sin^2 t$ に書き換えると、u_n と u_{n-2} を結ぶ漸化式（reduction formula）が得られる。この式に u_{n-1} を掛けると、nu_nu_{n-1} は n が増えても変わらないことがわかり、したがって $n=1$ のときの値に等しい。あとははさみうちの議論である。u_n は減少するので、積 u_nu_{n-1} は u_n^2 と u_{n-1}^2 の間にある。

解答

漸化式

$n \geq 2$ とする。$u_n = \int_0^{\pi/2} \sin t \, \sin^{n-1} t \, \mathrm{d}t$ と書き、$\sin^{n-1} t$ を微分し、$\sin t$ を積分して $-\cos t$ とする部分積分を行う。

$$\begin{aligned} u_n &= \Big[-\cos t \, \sin^{n-1} t\Big]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, \sin^{n-2} t \, \mathrm{d}t \\ &= 0 + (n-1)\int_0^{\pi/2} \big(1-\sin^2 t\big)\sin^{n-2} t \, \mathrm{d}t \\ &= (n-1)\big(u_{n-2} - u_n\big). \end{aligned}$$

境界項が消えるのは、上端で $\cos\frac{\pi}{2}=0$、下端で $\sin 0=0$ となるからである（ここで $n-1\geq 1$ を用いている）。u_n の項をまとめると

$$nu_n=(n-1)u_{n-2}\qquad (n\geq 2).$$

両辺に u_{n-1} を掛けると

$$nu_nu_{n-1}=(n-1)u_{n-1}u_{n-2}\qquad (n\geq 2),$$

となり、示すべき式が得られた。

一定の積

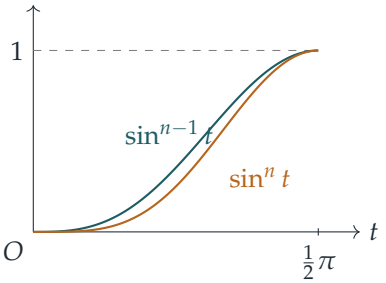
$n\geq 1$ に対して $p_n=nu_nu_{n-1}$ とおく。直前の結果は、すべての $n\geq 2$ について $p_n=p_{n-1}$ であることを述べているので、すべての $n\geq 1$ について $p_n=p_1$ である。ここで

$$u_0=\int_0^{\pi/2}1\,\mathrm{d}t=\tfrac{1}{2}\pi,\qquad u_1=\int_0^{\pi/2}\sin t\,\mathrm{d}t=\Big[-\cos t\Big]_0^{\pi/2}=1,$$

であるから、$p_1=1\cdot u_1u_0=\frac{1}{2}\pi$ である。よって

$$nu_nu_{n-1}=\tfrac{1}{2}\pi\qquad \text{すべての}n\geq 1.$$

グラフの概形と $0<u_n<u_{n-1}$



どちらの曲線も $t=0$ で 0 から始まって増加し、$t=\frac{1}{2}\pi$ で 1 に達する（図は $n=4$ の場合であり、$n=1$ のときは上側の曲線は直線 $y=1$ となる）。$0<t<\frac{1}{2}\pi$ では $0<\sin t<1$ であるから

$$0<\sin^n t=\sin t\cdot\sin^{n-1}t<\sin^{n-1}t.$$

したがって、$\sin^n t$ のグラフは両端を除いて $\sin^{n-1}t$ のグラフより真に下にある。どちらの関数も連続（continuous）なので、それぞれのグラフの下の面積は

$$0<u_n<u_{n-1}\qquad (n\geq 1).$$

を満たす。

考えてみよう 曲線は両端で接しているのに、なぜ不等式は等号を含まない（狭義の）不等式になるのだろうか。

差 $\sin^{n-1} t - \sin^n t$ は連続で、決して負にならず、たとえば $t = \frac{1}{4}\pi$ では正である。ある点で正となる連続関数は、その点のまわりの小さな区間で正であるから、正の面積を囲む。孤立した 2 点で接していても、このことは変わらない。同じ議論により $u_n > 0$ もわかる。

両側からの評価

$n \geq 1$ とする。$u_n > 0$ であるから、$u_n < u_{n-1}$ に nu_n を掛けると $nu_n^2 < nu_n u_{n-1}$ を得る。$u_{n-1} > 0$ であるから、nu_{n-1} を掛けると $nu_n u_{n-1} < nu_{n-1}^2$ を得る。真ん中の量は $\frac{1}{2}\pi$ なので

$$nu_n^2 < \tfrac{1}{2}\pi < nu_{n-1}^2 \qquad (n \geq 1).$$

はさみうちと極限

右側の不等式はすべての $n \geq 1$ で成り立つので、n の代わりに $n+1$ を用いてよい。

$$\tfrac{1}{2}\pi < (n+1)u_n^2, \qquad \text{よって} \qquad nu_n^2 > \frac{n}{n+1} \cdot \tfrac{1}{2}\pi.$$

これを左側の不等式と合わせると

$$\left(\frac{n}{n+1}\right) \tfrac{1}{2}\pi < nu_n^2 < \tfrac{1}{2}\pi.$$

$n \to \infty$ のとき $\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$ であるから、下からの評価は $\frac{1}{2}\pi$ に近づく。上からの評価は $\frac{1}{2}\pi$ そのものである。はさみうちの原理（squeeze theorem、sandwich theorem）により

$$nu_n^2 \to \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{ただし} n \to \infty.$$

検算

- 漸化式から $u_2 = \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{4}\pi$ となり、これは $\int_0^{\pi/2} \sin^2 t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{4}\pi$（$\sin^2$ の平均値は $\frac{1}{2}$）と一致する。さらに $2u_2u_1 = \frac{1}{2}\pi$ となり、予想どおりである。
- 数値的には（シンプソンの公式（Simpson's rule）による）$u_{10} \approx 0.38656$ であり、これは $\frac{63}{512}\pi$ に等しい。よって $10u_{10}^2 \approx 1.4943$ となり、$\frac{10}{11} \cdot \frac{1}{2}\pi \approx 1.4280$ と $\frac{1}{2}\pi \approx 1.5708$ の間にある。
- 漸化式を $n = 10^5$ まで計算すると $nu_n^2 \approx 1.570788$ となり、すでに $\frac{1}{2}\pi$ に非常に近い。

よくある間違い

- 漸化式には $n \geq 2$ が必要であることを忘れること。そのため定数は u_1 と u_2 だけでなく、u_0 と u_1 を用いて決めなければならない。
- $\sin^n t \leq \sin^{n-1} t$ であることだけを理由に $u_n < u_{n-1}$ と主張すること。これから得られるのは $\leq$ であり、狭義の不等式を得るには、ある区間上で不等式が狭義に成り立つことが必要である。
- $\frac{1}{2}\pi < nu_{n-1}^2$ から直接、下からの評価を得ようとすること。これは u_n ではなく u_{n-1} を評価しているので、まず添字をずらす必要がある。

STEP のその先へ

これらはウォリス（Wallis）積分である。u_{2m} と u_{2m+1} を積の形で書き表し、$nu_n^2 \to \frac{1}{2}\pi$ を用いると、ウォリスの公式 $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots$ が導かれる。同じ評価により、スターリング（Stirling）の公式 $n! \sim \sqrt{2\pi n}\,(n/\mathrm{e})^n$ における定数 $\sqrt{2\pi}$ が決まる。ここで用いたはさみうちの議論は、大学 1 年次の解析学（analysis）の標準的な道具である。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、これを丁寧に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。