解答例

STEP II 1995、第 3 問

純粋数学 • 論理的推論と数え上げ

> **STEP II 1995、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s2-q3

鍵となる考え方

これは姿を変えた論理パズルであり、糸口は**数え上げ**（counting）である。各ステージでは $5+4+3+2+1=15$ 点が配られるので、5 人の得点の合計はわかっている。アルエの得点は最大値にきわめて近いので、アルエの結果はほぼすべて決まってしまう。その後、エリュアールの結果からエリュアールの得点を上下から挟み込み、カミュの「4 回同じ順位」という条件によって調べるべき場合はわずかしか残らない。

解答

各選手の合計得点を A, B, C, D, E と書く。条件より $A > B > C > D > E$ かつ $A = 24$ である。

合計点とアルエのステージ

各ステージでは 15 点が配られるので、5 つのステージ全体では

$$A+B+C+D+E = 75, \qquad \text{よって} \qquad B+C+D+E = 51.$$

アルエが得られる点数は最大で $5\times 5 = 25$ 点である。24 点ということはちょうど 1 点だけ失ったことを意味するので、アルエは **4 つのステージで 1 位、1 つのステージで 2 位**であった。ステージ 5 ではエリュアールが優勝したので、アルエの 2 位はステージ 5 でなければならず、アルエはステージ 1–4 で優勝した。

エリュアールが11点である理由

下界（*lower bound*）。エリュアールはステージ4で3点、ステージ5で5点を得ており、残りの3つのステージではそれぞれ少なくとも1点を得ている。したがって $E \geq 3+5+3 = 11$ である。

上界（*upper bound*）。得点は相異なる整数で $B > C > D > E$ であるから、$D \geq E+1$、$C \geq E+2$、$B \geq E+3$ である。よって

$$51 = B+C+D+E \geq 4E+6, \qquad \text{ゆえに} \qquad E \leq \tfrac{45}{4} < 12.$$

2つの評価を合わせると $E = 11$ を得る。さらに、下界で等号が成り立つことから、エリュアールはステージ1、2、3のそれぞれで**最下位**であったこともわかる。

バルト、カミュ、ディドロに残された順位

これでアルエとエリュアールの各ステージでの順位がすべてわかったので、バルト、カミュ、ディドロは残りの順位を分け合ったことになる。

ステージ	アルエ、エリュアール	B、C、D に残された順位	
1, 2, 3	1位、5位	2位、3位、4位	（4, 3, 2点）
4	1位、3位	2位、4位、5位	（4, 2, 1点）
5	2位、1位	3位、4位、5位	（3, 2, 1点）

また $B+C+D = 51-11 = 40$ であり、$B > C > D > 11$ より $D \geq 12$、$C \geq 13$ である。

> **考えてみよう** カミュは4回同じ順位でゴールした。表を見ると、それはどの順位でありうるか。

答えは2位、3位、4位のいずれかである。カミュが5位になりえたのはステージ4と5だけで、それは2つのステージであって4つではない。3つの可能性を順に調べる。

カミュが4回2位の場合。 2位が空いていたのはステージ1–4だけなので、カミュはそのすべてで2位であった。すると、バルトはステージ1–3でそれぞれ高々3点、ステージ4で高々2点、ステージ5で高々3点である。よって $B \leq 9+2+3 = 14$ となる。しかし $C \geq 4 \times 4 = 16 > B$ となり、矛盾である。

カミュが4回4位の場合。 4位はどのステージでも2点なので、カミュの合計の最大値は $4 \times 2 + 4 = 12$ である（残りのステージで2位の場合）。これは $C \geq 13$ に矛盾する。

カミュが4回3位の場合。 3位が空いていたのはステージ1、2、3、5であり、どれも3点なので、これらがカミュの4回の3位である。ステージ4でのカミュの得点を $x \in \{4, 2, 1\}$ とすると、$C = 12 + x$ である。

- $x = 4$ のとき：$C = 16$ なので $B \geq 17$ であり、$D = 40 - B - C \leq 7$ となる。これは $D \geq 12$ に矛盾する。
- $x = 2$ のとき：$C = 14$ なので $B \geq 15$ であり、$D \leq 11$ となる。これも矛盾である。
- $x = 1$ のとき：$C = 13$ なので $B + D = 27$ であり、$B \geq 14$ かつ $12 \leq D \leq 12$ である。よって $D = 12$、$B = 15$ である。

したがって得点は

$$\boxed{B = 15, \quad C = 13, \quad D = 12} \qquad (\text{ただし} A = 24,\ E = 11).$$

最終ステージでのバルト

考えてみよう 合計点はわかったが、ステージごとの結果はわかっていない。ステージ 5 の結果を確定させるのに十分な情報はあるだろうか。

ある。偶奇性（parity）による議論を使う。カミュはステージ 1、2、3、5 で 3 位、ステージ 4 で 5 位なので、ステージ 1–4 のそれぞれでバルトとディドロは 4 点と 2 点の順位を分け合った。ステージ 5 では、2 人は 2 点と 1 点の順位（4 位と 5 位）を分け合った。ディドロがステージ 1–4 のうち k 個で 4 点の順位をとり、ステージ 5 で $s \in \{1, 2\}$ 点を得たとすると、

$$D = 4 \times 2 + 2k + s = 8 + 2k + s = 12.$$

よって $s = 4 - 2k$ は偶数であり、$s = 2$（かつ $k = 1$）でなければならない。ディドロは最終ステージで 4 位だったので、**バルトは最終ステージで最下位（5 位）であった。**

このようなツアーは実際に存在する。たとえば、ステージ 1：A, D, C, B, E、ステージ 2 と 3：A, B, C, D, E、ステージ 4：A, B, E, D, C、ステージ 5：E, A, C, D, B とすればよい。このとき得点は 24, 15, 13, 12, 11 となり、条件を満たす。

検算

- 合計が合っている：$24 + 15 + 13 + 12 + 11 = 75 = 5 \times 15$。
- 上の例のツアーでは、カミュは 4 つのステージで 3 位であり、エリュアールはステージ 4 で 3 位、ステージ 5 で 1 位である。
- ステージ結果の組合せとしてありうる 120^5 通りすべてをコンピュータで探索し、すべての条件を満たすものを残すと、得点は $(24, 15, 13, 12, 11)$ しか現れない。どの場合もバルトはステージ 5 で 5 位である。（条件を満たすツアーはちょうど 4 通りあり、ディドロがステージ 1–4 のどれで 2 位になったかによって決まる。）

よくある間違い

- $E \geq 11$ だけを示してしまう。問題はエリュアールが 11 点で**なければならない**理由を問うているので、$B + C + D + E = 51$ と得点が相異なることから得られる上界が欠かせない。
- カミュが 4 つの**連続した**ステージで同じ順位だったと思い込む、あるいは 4 位の場合を忘れる。
- 得点は求めたが、最終ステージの順位が一意に決まることを証明していない。例のツアーを 1 つ挙げるだけでは不十分であり、偶奇性の議論によって、ありうるすべてのツアーでバルトがステージ 5 で最下位であることが示されるのである。

STEP のその先へ

この議論は 3 つの手から成り立っている。保存則（conservation law、合計が一定であること）、極端な場合に着目する議論（extremal reasoning、24 が最大値にほぼ等しいこと）、そして偶奇性の議論である。この 3 つはいずれも組合せ論（combinatorics）で繰り返し現れる。ある量を上下から挟んで値を確定させる方法は、解析学（analysis）や数学オリンピック（olympiad）の問題解決における基本技法でもある。この種のパズルをさらに楽しみたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* に挑戦するとよい。Engel の *Problem-Solving Strategies*（問題解決の戦略）には、不変量の原理と極端原理（invariance and extremal principles）にそれぞれ丸ごと 1 章が割かれている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。