解答例

STEP II 1995、第 2 問

純粋数学 ・ 塗り分けの再帰的な数え上げ

> **STEP II 1995、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s2-q2

この問題は、*Beyond STEP* の第 9.3 節「柵の杭を塗り分ける」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch09/fence-posts.html

鍵となる考え方

最初の柱が赤である塗り方を、最後の柱の色によって分類する。一列に並んだ柱の塗り方はどれも柱を 1 本ずつ付け加えていくことで作られ、新しく加える柱には許される色がちょうど 2 通りあるので、総数を数えるのは易しい。漸化式（recurrence）が必要になるのは、「最後が赤」と「最後が赤でない」への振り分けのほうである。円の場合は、両端の色も異ならなければならない一列の場合にすぎない。

解答

$r_{n+1} = s_n$ となる理由

$n+1$ 本の柱の正しい塗り方で、最初と最後の柱が赤であるものを 1 つとる。柱 n は赤である柱 $n+1$ に隣接しているので、柱 n は赤ではない。したがって柱 $n+1$ を取り除くと、最初の柱が赤で最後の柱が赤でない n 本の柱の正しい塗り方、すなわち s_n 通りのうちの 1 つが残る。

逆に、n 本の柱の s_n 通りの塗り方のうちの 1 つが与えられたとき、柱 n は赤でないので末尾に赤い柱を付け加えることができ、r_{n+1} で数えられる塗り方が得られる。この 2 つの操作は互いに他方を元に戻すので、一対一対応（one-to-one correspondence）を与え、

$$r_{n+1} = s_n.$$

$r_n + s_n$ を求める

最初の柱が赤である正しい塗り方は、どれも最後が赤であるか別の色であるかのいずれかなので、$r_n + s_n$ は最初の柱が赤である正しい塗り方をすべて数えたものである。柱を順に塗っていく。最初の柱は赤（1通り）であり、それ以降の各柱は直前の柱の色以外のどの色でもよいので、それまでにどう塗ったかによらず毎回2通りの選び方がある。よって

$$r_n + s_n = 2^{n-1}.$$

$r_{n+1} + r_n$ を求める

$s_n = r_{n+1}$ を代入すると、

$$r_{n+1} + r_n = 2^{n-1} \qquad (n \geq 1).$$

数学的帰納法

$P(n)$ を命題 $r_n = \frac{1}{3}\left(2^{n-1} + 2(-1)^{n-1}\right)$ とする。

初期段階。 柱が1本で赤く塗られているとき、その柱は最初の柱でも最後の柱でもあるので、$r_1 = 1$ である。公式は $\frac{1}{3}(1+2) = 1$ を与えるので、$P(1)$ は成り立つ。

帰納段階。 ある $n \geq 1$ について $P(n)$ が成り立つと仮定する。前の結果より、

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= 2^{n-1} - r_n \\ &= \frac{3 \cdot 2^{n-1} - 2^{n-1} - 2(-1)^{n-1}}{3} \\ &= \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}, \end{aligned}$$

ここで $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ および $-(-1)^{n-1} = (-1)^n$ を用いた。これはまさに $P(n+1)$ である。数学的帰納法（induction）により、すべての $n \geq 1$ について $P(n)$ が成り立つ。

> **考えてみよう** なぜ帰納法を $n = 2$ から始めたり、初期段階を2つ用いたりしないのか？

漸化式 $r_{n+1} = 2^{n-1} - r_n$ は各項をその直前の1項だけを用いて表すので、初期段階は1つで十分である。2項間の漸化式であれば2つ必要になる。

円形に並んだ柱

円周に沿って柱に $1, 2, \ldots, n$ と番号を付けると、柱 n は柱1にも隣接することになる。円形の正しい塗り方とは、まさに一列 $1, 2, \ldots, n$ の正しい塗り方であって、さらに柱 n が柱1と異なる色であるもののことである。

考えてみよう 最初の柱を赤に固定しない塗り方は、どのように数えればよいか？

対称性を用いる。2 つの色の名前を入れ替えると正しい塗り方は正しい塗り方に移るので、柱 1 の色のどの選び方に対しても塗り方の数は同じである。柱 1 が赤のとき、最後の柱が最初の柱と異なる一列の塗り方は、ちょうど s_n で数えられるものである。よって円形の塗り方の数は

$$\begin{aligned} 3s_n &= 3\left(2^{n-1} - r_n\right) \\ &= 3\cdot 2^{n-1} - 2^{n-1} - 2(-1)^{n-1} \\ &= 2^n + 2(-1)^n. \end{aligned}$$

ここで柱は区別できる（決まった場所に立っている）ので、回転によって移り合う 2 つの塗り方は別々に数える。

検算

- 小さな場合を手で確かめる：$r_2 = 0$（隣接する 2 本の柱が両方とも赤になることはない）、$r_3 = 2$（RWR、RBR）であり、$\frac{1}{3}(2-2) = 0$ および $\frac{1}{3}(4+2) = 2$ と一致する。
- 3 本の柱からなる三角形では 3 色すべてを使わなければならず、その方法は $3! = 6$ 通りであり、$2^3 + 2(-1)^3 = 6$ である。正方形に並んだ 4 本の柱では $16 + 2 = 18$ となる。
- $n \leq 12$ についてすべての塗り方を総当たりで数えると、上のすべての公式と一致する。たとえば $r_{10} = 170$、$s_{10} = 342$ であり、10 本の柱の円形の塗り方は 1026 通りである。

よくある間違い

- 柱 1 が赤である必要はないことを忘れて、円の場合の答えを r_n や s_n としてしまう。係数 3 が残りの 2 色の分を補う。
- 回転を除くために n で割ってしまう。柱は決まった位置にあるので、回転した塗り方は異なる塗り方である。

STEP のその先へ

円の場合の答え $2^n + 2(-1)^n$ は、閉路グラフ（cycle graph）C_n の**彩色多項式**（chromatic polynomial）の $k = 3$ における値である。彩色多項式は一般に k 色に対して $(k-1)^n + (-1)^n(k-1)$ であり、「一列に並べてから両端を閉じる」という同じ議論で証明できる。彩色多項式や $r_{n+1} + r_n = 2^{n-1}$ のような漸化式は、組合せ論やグラフ理論の最初の講義で扱う標準的な内容である。この趣旨の問題をさらに解きたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（大学入学前の発展的な数学問題集）を参照されたい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。