解答例

STEP II 1995、第 12 問

確率・統計 ・ 順番に撃ち合う決闘

> **STEP II 1995、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s2-q12

この問題は、*Beyond STEP* の第 12.13 節「三つ巴の決闘」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/truel.html

鍵となる考え方

誰かが当たるまで続く決闘（duel）では、両者が外すたびにゲームは「最初からやり直し」になる。したがって、求める確率はそれ自身を含む簡単な方程式を満たし、無限級数（infinite series）を足し合わせる必要はない（足し合わせてもよいが）。三者の決闘では、アルジャーノンの最初の一投の各選択肢はすぐに二者の決闘に帰着し、それは最初の結果で処理できる。意外なのは、アルジャーノンにとって最善の手が誰にも当てないことだという点である。

解答

二者の決闘

パーシーが先に投げるとき、パーシーが勝つ確率を P とする。最初の一組の投擲に注目する。

- パーシーが最初の一投で当てる（確率 p）。このときパーシーはただちに勝つ。
- パーシーが外し、続いてロドニーが当てる（確率 $(1-p)r$）。このときパーシーは負ける。
- 両者とも外す（確率 $(1-p)(1-r)$）。このとき、パーシーが投げる番という最初の状態に戻る。各投擲は独立（independent）なので、ここからパーシーが勝つ確率

は再び P である。

よって

$$P = p + (1-p)(1-r)P \quad \Longrightarrow \quad P\big(1-(1-p)(1-r)\big) = p \quad \Longrightarrow \quad P = \frac{p}{p+r-pr},$$

となる。ここで $1-(1-p)(1-r) = p+r-pr$ であり、$p>0$ よりこれは正である。これが求める結果である。

> **考えてみよう** ゲームは必ず終わるのか。つまり、パーシーが負けることは本当にロドニーが勝つことと同じなのか。

同じである。最初の n ラウンドがすべて両者の外れで終わる確率は $\big((1-p)(1-r)\big)^n$ であり、$p>0$ よりこれは 0 に収束する。同じことだが、等比級数（geometric series）$\sum_{k\geq 0} p\big((1-p)(1-r)\big)^k$ を足し合わせても同じ答えが得られる。

三者の決闘では、A、B、C が当てる確率はそれぞれ $\frac{2}{5}$、$\frac{3}{5}$、1 である。A が先に投げる A と B の二者の決闘は二度現れるので、上の結果に $p=\frac{2}{5}$、$r=\frac{3}{5}$ を代入して、ここで計算しておく。

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{5}+\frac{3}{5}-\frac{6}{25}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{19}{25}} = \frac{10}{19}.$$

小問 (i)

アルジャーノンがカスバートに当てると、残るのはアルジャーノンとバーティだけであり、次にバーティがアルジャーノンを狙って投げる。アルジャーノンが生き残るのはバーティが外す場合（確率 $\frac{2}{5}$）に限る。その後は A が先に投げる A と B の決闘となり、アルジャーノンはこれに確率 $\frac{10}{19}$ で勝つ。したがって

$$\mathrm{P}(\text{A が勝つ}) = \frac{2}{5}\cdot\frac{10}{19} = \frac{4}{19}.$$

小問 (ii)

アルジャーノンがバーティに当てると、次にカスバートが投げ、狙う相手はアルジャーノンしか残っていない。カスバートは決して外さないので、アルジャーノンが勝つ確率は 0 である。

小問 (iii)

アルジャーノンが外すと、三人とも残っている。次にバーティが投げ、カスバートを狙う。

- 確率 $\frac{3}{5}$ でバーティはカスバートに当てる。アルジャーノンとバーティが残り、アルジャーノンが投げる番となるので、アルジャーノンは確率 $\frac{10}{19}$ で勝つ。
- 確率 $\frac{2}{5}$ でバーティは外す。するとカスバートはバーティを狙い、確実に当てる。アルジャーノンとカスバートが残り、アルジャーノンが投げる番となる。外せばカスバートに当てられるので、アルジャーノンはこの一投で当てなければならない。よって彼が勝つ確率は $\frac{2}{5}$ である。

したがって

$$\mathrm{P}(\text{A が勝つ}) = \frac{3}{5}\cdot\frac{10}{19} + \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5} = \frac{6}{19} + \frac{4}{25} = \frac{150+76}{475} = \frac{226}{475}.$$

バーティとカスバートはその後同じように行動するので、この値は外れがどのように生じたか、つまり故意に外したのか狙いが外れたのかによらず同じである。

アルジャーノンの最善の作戦

考えてみよう アルジャーノンが選べるのは誰かを**狙う**ことだけであり、誰かに**当てる**ことを選べるわけではない。それぞれの選択は実際に彼に何をもたらすのか。

誰かを狙うと、確率 $\frac{2}{5}$ で当たり、確率 $\frac{3}{5}$ で外れる。外れた場合は小問 (iii) の状況になる。よって

$$\begin{aligned}
\text{カスバートを狙う:}\quad & \frac{2}{5}\cdot\frac{4}{19} + \frac{3}{5}\cdot\frac{226}{475} = \frac{200+678}{2375} = \frac{878}{2375} \approx 0.370,\\
\text{バーティを狙う:}\quad & \frac{2}{5}\cdot 0 + \frac{3}{5}\cdot\frac{226}{475} = \frac{678}{2375} \approx 0.285,\\
\text{故意に外す:}\quad & \frac{226}{475} = \frac{1130}{2375} \approx 0.476.
\end{aligned}$$

カスバートに確実に当てられたとしても $\frac{4}{19} = \frac{100}{475}$ にしかならず、これは $\frac{226}{475}$ より小さい。どちらの相手に当てても、彼の勝つ確率は下がるだけである。したがってアルジャーノンは**最初の一投を故意に外す**べきである。そうすればバーティとカスバートが互いに撃ち合い、アルジャーノンは生き残った方に対して先に投げることができる。この作戦をとると彼が勝つ確率は $\frac{226}{475}$ であり、これが求める結果である。

検算

- $r = 0$ のとき決闘の公式は 1 を与え、$p = 1$ のときも 1 を与える。どちらも当然そうなるべき値である。
- 三つの選択肢の順位は $0.476 > 0.370 > 0.285$ である。三者の決闘全体のモンテカル

ロ・シミュレーション（Monte Carlo simulation）（各戦略につき 3×10^5 回）では 0.476、0.369、0.284 となり、厳密な値と一致した。

- 小問 (iii) の妥当性の確認：$\frac{6}{19} \approx 0.316$ と $\frac{4}{25} = 0.16$ を足すと 0.476 になる。

よくある間違い

- 最初の一投の後の投げる順番を取り違える。小問 (i) では**次に**投げるのはバーティなので、決闘の公式が使えるのはバーティが外した後だけである。
- 「カスバートを狙う」を「カスバートに当てる」と同じものとして扱う。小問 (i)–(iii) は結果を条件とする条件付き（conditional）確率であり、作戦を評価するにはそれらに $\frac{2}{5}$ と $\frac{3}{5}$ の重みを付けなければならない。

STEP のその先へ

一段階進んだ後に確率をそれ自身で表す方法は**第一ステップ解析**（first-step analysis）と呼ばれる。これはマルコフ連鎖（Markov chains）の基本的な道具であり、到達確率（hitting probabilities）や期待到達時間（expected hitting times）を連立一次方程式の解として与える。三者の決闘「truel」はゲーム理論（game theory）ではよく知られたパズルであり、最も弱いプレイヤーが争いに加わらないことで最も有利になることが多い。さらに詳しくは、Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*、または Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability* を参照せよ。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。