解答例

STEP II 1995、第 11 問

力学 ・ 速度に比例する空気抵抗

STEP II 1995、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

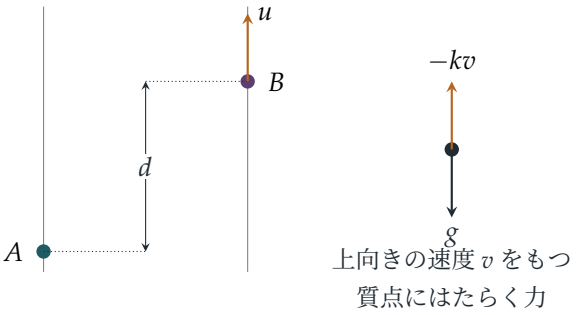
step.maths.org/questions/95-s2-q11

鍵となる考え方

抵抗が速度に**線形**（linear）であるため、運動方程式は線形であり、質点が上昇していても落下していても同じ方程式が成り立つ。そこで二つの運動方程式の差をとる。すると重力は打ち消し合い、**相対速度**（relative velocity）は単に指数関数的に減衰する。これを一度積分すれば、それぞれの質点がどこにあるかを知る必要もなく、直ちに両者の間隔が得られる。

解答

各物体を、鉛直線上を運動する単位質量の質点（particle）とみなす。質点には重力 g と、運動を妨げる向きに大きさ $k|v|$ の抵抗がはたらく。上向きを正とし、原点を A にとる。時刻 t における質点 1（A から出発）と質点 2（B から出発）の高さをそれぞれ x_1、x_2、速度を v_1、v_2 とする。



運動方程式

上向きの速度 v をもつ質点について、抵抗は $-kv$ である。$v > 0$（上昇中）ならば下向き、$v < 0$（落下中）ならば上向きであり、いずれの場合もまさに「運動を妨げる向き」になっている。したがって単位質量に対するニュートン（Newton）の第二法則から、各質点について

$$\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} = -g - kv_1, \qquad \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} = -g - kv_2,$$

が得られ、これはすべての $t \geq 0$ で成り立つ。

考えてみよう 質点 2 は上昇し、止まり、そして落下する。それぞれの段階ごとに別の方程式が必要ではないのか？

抵抗が**速さの 2 乗**に比例する場合なら必要である。そのとき力は $-kv|v|$ となり、v の符号が変わると式の形が変わる。ここでの力は $-kv$ という単一の式で、v の向きが変われば自動的に向きを反転するので、一つの方程式で運動全体を記述できる。

相対運動

$w = v_2 - v_1$ を、質点 1 に対する質点 2 の速度とする。二つの方程式の差をとると、重力の項が打ち消し合って

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = -kw, \qquad w(0) = u - 0 = u,$$

となるので、$w = u\,\mathrm{e}^{-kt}$ である。次に $s = x_2 - x_1$ とおく。B は A より高さ d だけ上にあるので $s(0) = d$ である。すると $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t = w$ であり、

$$s = d + \int_0^t u\,\mathrm{e}^{-k\tau}\,\mathrm{d}\tau = d + \frac{u}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right).$$

$u \geq 0$ かつ $1 - \mathrm{e}^{-kt} \geq 0$ であるから $s \geq d > 0$ となる。すなわち質点 2 は常に質点 1 より上にあり、二つの質点が出会うことはない。よって時刻 t における両者の距離は

$$\boxed{d + \frac{u}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right)}$$

である。$k > 0$ であるから $t \to \infty$ のとき $\mathrm{e}^{-kt} \to 0$ となり、距離は $d + \dfrac{u}{k}$ に近づく。これが示すべきことであった。

個々の運動（遠回りをしたい場合）

各方程式を別々に解く（1 階線形微分方程式、あるいは変数分離形である）と $v = -\frac{g}{k} + \left(v(0) + \frac{g}{k}\right)\mathrm{e}^{-kt}$ が得られ、さらに積分すると

$$x_1 = -\frac{gt}{k} + \frac{g}{k^2}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right),$$
$$x_2 = d - \frac{gt}{k} + \frac{1}{k}\left(u + \frac{g}{k}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right).$$

となる。差をとると gt/k と g/k^2 の項が打ち消し合い、同じ s が再び得られる。両質点はともに終端速度（terminal velocity）$-g/k$ に近づき、そのために両者の間隔は一定値に落ち着くのである。

検算

- $t = 0$ のとき距離は d である。また t が小さいとき距離はおよそ $d + ut$ であり、これは抵抗がない場合（このとき両質点は重力によって等しく落下する）と一致する。
- $u = 0$ ならば二つの質点は静止状態から同時に放され、まったく同じ運動をして、間隔 d を保つ。公式もそのとおりになっている。
- 単位：k の単位は s^{-1}（単位質量・単位速度あたりの力）であるから、u/k は長さである。
- 数値的検証として、ランダムな k、u、d、t に対し、ルンゲ・クッタ法（Runge–Kutta method）で両方の運動方程式を数値的に解いたところ、公式と約 10^{-12} の精度で一致した。$k = 0.5$、$u = 10$、$d = 3$ のとき、距離は $t = 1$ で 10.87、$t = 20$ で 22.999 であり、$d + u/k = 23$ に近づいている。

よくある間違い

- 質点 2 の運動を「上昇」と「落下」の段階に分け、抵抗の符号をそれぞれ変えること。ここではその必要はなく、符号の誤りのよくある原因となる。
- v がすでに（負の値をとる）上向きの速度であるのに、落下する質点の抵抗を $+kv$ と書いてしまうこと。これは符号を二重に数えている。

STEP のその先へ

方程式の差をとるという技法がうまくいくのは、運動方程式が線形だからである。二つの解の差は斉次方程式（homogeneous equation）$\dot{w} = -kw$ を満たす。これは線形

微分方程式の理論全体を支える重ね合わせの原理（superposition principle）であり、そこではすべての解が「特殊解＋余関数」（particular solution plus complementary function）の形に表される。2 乗に比例する抵抗の場合はこの原理が成り立たず、間隔の振る舞いはまったく異なるものになる。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（『初等微分方程式』）は線形理論を展開しており、Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（『力学入門』）は両方の種類の抵抗を受ける運動を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。