解答例

STEP II 1995、第 10 問

力学 ・ 衝突と反発係数

> **STEP II 1995、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s2-q10

鍵となる考え方

各衝突（collision）は、運動量保存則（conservation of momentum）とニュートンの実験則（Newton's experimental law）という二つの方程式で解ける問題である。二回の衝突を順に処理し、二番目の球の最終速度を u とおいて m_1 について解く。すると不等式は、質量は正でなければならないという単純な事実から導かれる。最後の小問では、衝突が**相対**速度（relative velocity）のみに依存することに注目する。速さ v で動く座標系（frame）から運動を眺めれば、最初の小問に帰着する。

解答

球は滑らかな台の上の一直線上を動く質点としてモデル化する。したがって水平方向に働く力は球どうしの撃力（impulse）だけである。最初の球の運動の向きを正の向きとする。



一回目の衝突

一回目の衝突の直後における一番目と二番目の球の速度をそれぞれ v_1 と w とする。運動量保存則とニュートンの実験則（遠ざかる速さは近づく速さの e 倍である）から

$$m_1 v_1 + m_2 w = m_1 u, \qquad w - v_1 = eu.$$

$v_1 = w - eu$ を第一式に代入すると $(m_1 + m_2)w = m_1(1+e)u$ となるので

$$w = \frac{m_1(1+e)u}{m_1+m_2}, \qquad v_1 = \frac{(m_1 - em_2)u}{m_1+m_2}.$$

二回目の衝突

次に、速度 w で動く二番目の球が、静止している三番目の球に衝突する。これは m_1, m_2, u を m_2, m_3, w に置き換えた同じ状況であるから、衝突後の二番目の球の速度は

$$\frac{(m_2 - em_3)w}{m_2+m_3}.$$

これが u に等しいと与えられている。w を代入し、$u \neq 0$ で割ると

$$\frac{(m_2 - em_3)\, m_1(1+e)}{(m_2+m_3)(m_1+m_2)} = 1, \qquad \text{よって} \qquad m_1(1+e)(m_2 - em_3) = (m_1+m_2)(m_2+m_3).$$

m_1 を含む項をまとめると

$$m_1[(1+e)m_2 - e(1+e)m_3 - m_2 - m_3] = m_2(m_2+m_3),$$

となり、括弧内は $em_2 - m_3(1+e+e^2)$ と整理できる。したがって

$$\boxed{m_1 = \frac{m_2(m_2+m_3)}{em_2 - m_3(1+e+e^2)}}.$$

考えてみよう 手元にあるのが等式だけのとき、不等式はどこから出てくるのだろうか。

物理から出てくる。質量は正である。分子 $m_2(m_2+m_3)$ は正であり、割った括弧の部分は 0 にはなりえない（そうでなければ、その直前の式は $0 = m_2(m_2+m_3)$ となってしまう）。よって $m_1 > 0$ であるためには分母が正でなければならない：

$$em_2 - m_3(1+e+e^2) > 0, \qquad \text{すなわち} \qquad m_2 e > m_3(1+e+e^2),$$

これが示すべきことであった。

最後の小問では衝突の回数を数えるので、その後に何も起こらないことを確認しておく価値がある。二回目の衝突の後、二番目の球は速度 u で動き、一番目の球は速度 $v_1 = u - \frac{m_2(1+e)u}{m_1+m_2} < u$ で動くので、一番目の球が再び二番目の球に追いつくことはない。三番目の球は相対速度 $ew > 0$ で二番目の球から遠ざかる。よって衝突はちょうど二回である。

最後の小問

今度は、一番目の球を除く三つの球が共通の速度 v をもち、一番目の球は速度 $u > v$ で動いている。この直線に沿って一定の速度 v で動く座標系から運動を眺める。この座標系では：

- 一番目の球は速度 $u - v > 0$ で二番目の球に向かって動き、二番目と三番目の球は静止している。
- 各衝突において運動量は依然として保存される。すべての速度から v を引くと、運動量の式の両辺が同じ量 $(m_a + m_b)v$ だけ変化するからである。
- ニュートンの実験則は変わらない。速度の差しか含まないからである。

したがって、動く座標系では最初の小問とまったく同じ状況になる。ただし u は $u - v$ に置き換わり、質量は同じ関係式（これは u をまったく含まない）を満たす。最初の小問より、二回の衝突の後、二番目の球はこの座標系に対して速度 $u - v$ で動く。台の座標系に戻るには v を足し戻せばよい。二回の衝突の後の二番目の球の速度は

$$\boxed{u}.$$

条件 $u > v$ は、そもそも一回目の衝突が起こることを保証するためのものである。仮定 $v > 0$ は、実はこの議論には必要ない。

検算

$e = \frac{1}{2}$, $m_3 = 1$, $m_2 = 4$ とする。このとき $em_2 = 2 > \frac{7}{4} = m_3(1 + e + e^2)$ であり、公式から $m_1 = \frac{4 \cdot 5}{1/4} = 80$ を得る。$u = 7$ とすると、一回目の衝突で二番目の球は $w = \frac{80 \cdot \frac{3}{2} \cdot 7}{84} = 10$ となり、続く二回目の衝突で $\frac{(4 - \frac{1}{2}) \cdot 10}{5} = 7 = u$ となる。確かにそうなるべき値である。また、条件を満たす質量と e を無作為に 10^4 通り以上選び、コンピュータで衝突を（分数を用いて）厳密に計算した。どの場合も、衝突がちょうど二回であること、二番目の球の最終速度が u であること、そして二番目と三番目の球に共通の速度 $v < u$ を加えても最終速度は同じ u になることが確かめられた。

よくある間違い

- ニュートンの実験則を逆向きに書いてしまうこと。例えば $v_1 - w = eu$ とする誤りである。前にある球は、少なくとも後ろの球と同じ速さで動いていなければならない。
- 最後の小問で、問題文がはっきりと促している座標系の変換を使わずに、衝突を一

から計算し直してしまうこと。

- 最後に v を足し戻すのを忘れ、答えを $u - v$ としてしまうこと。

STEP のその先へ

最後の小問は、ガリレイ不変性（Galilean invariance）の一例である。衝突の法則は一定の速度で動くどの座標系でも同じ形をしているので、問題が最も易しくなる座標系を選んでよい。大学の力学で好んで使われるのは重心系（centre-of-mass frame）である。重心系では全運動量が 0 であり、衝突は単に速度の向きを反転させ、e 倍するだけである。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、衝突を扱う際にこの考え方を多用している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。