解答例

STEP II 1995、第 1 問

純粋数学 ・ 等比級数の微分

> **STEP II 1995、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s2-q1

鍵となる考え方

有限等比級数（finite geometric series）には閉じた式（closed form）があり、また x の二つの関数の間に成り立つ恒等式（identity）は、微分することで新しい恒等式を与える。$\sum x^k$ を微分すると因子 k が降りてくるが、これこそが等比級数を $\sum kx^{k-1}$ に変える仕組みである。さらに $x=-1$ を代入すれば、符号が交互に変わる形が得られる。平方の和については、答えの形から A と B が何でなければならないかを読み取り、それを数学的帰納法（induction）で証明するのが最もすっきりした方法である。

解答

小問 (i)

$S = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ とおく。すると

$$S(1-x) = (1 + x + \cdots + x^n) - (x + x^2 + \cdots + x^{n+1}) = 1 - x^{n+1},$$

となる。$x, x^2, \ldots, x^n$ の各べきは正の符号と負の符号でちょうど一回ずつ現れ、打ち消し合うからである。$x \neq 1$ ならば $1 - x \neq 0$ であるから、これで割ることができて

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x},$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

(i) の両辺はいずれも $x \neq 1$ において x の微分可能な関数であり、そこで一致しているので、その導関数（derivative）も一致する。左辺については

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1 + x + \cdots + x^n) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}.$$

右辺については、商の微分法（quotient rule）により

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}\right) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1 - x^{n+1})}{(1-x)^2} = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

ここで $x = -1$ とおく。$-1 \neq 1$ であるから、これは許される。項 kx^{k-1} は $(-1)^{k-1}k$ になるので、左辺は $1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + (-1)^{n-1}n$ となる。右辺は、$(-1)^{n+1} = -(-1)^n$ を用いると

$$\frac{1 - (n+1)(-1)^n + n(-1)^{n+1}}{4} = \frac{1 - (-1)^n(2n+1)}{4},$$

となる。

- n が偶数ならば $(-1)^n = 1$ であり、値は $\dfrac{1 - 2n - 1}{4} = -\dfrac{n}{2}$ である。
- n が奇数ならば $(-1)^n = -1$ であり、値は $\dfrac{1 + 2n + 1}{4} = \dfrac{n+1}{2}$ である。

これが示すべきことであった。

小問 (iii)

$T_n = 1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{n-1}n^2$ とおき、$f(n) = An^2 + Bn$ として $T_n = (-1)^{n-1}f(n)$ と書けると仮定する。

> **考えてみよう** 公式が正しいとわかる前に、どうすれば A と B を求められるだろうか。

T_n について確実にわかっている唯一の事実を使う。すなわち、隣り合う和の差は最後の項であり、$T_n - T_{n-1} = (-1)^{n-1}n^2$ である。$T_{n-1} = (-1)^{n-2}f(n-1) = -(-1)^{n-1}f(n-1)$ であるから、これは

$$(-1)^{n-1}\big(f(n) + f(n-1)\big) = (-1)^{n-1}n^2, \qquad \text{よって} \qquad f(n) + f(n-1) = n^2.$$

となる。$f(n) = An^2 + Bn$ とすると

$$\begin{aligned} f(n) + f(n-1) &= An^2 + Bn + A(n-1)^2 + B(n-1) \\ &= 2An^2 + (2B - 2A)n + (A - B). \end{aligned}$$

これがすべての n について n^2 に等しくなるためには、$2A = 1$ かつ $B = A$ でなければならない。すなわち

$$A = B = \tfrac{1}{2}, \qquad T_n = (-1)^{n-1}\,\frac{n(n+1)}{2}.$$

である。（これらの値は必然的に決まる。$n = 1$ から $A + B = 1$、$n = 2$ から $-(4A + 2B) = -3$ が得られ、その解は $A = B = \frac{1}{2}$ のみである。）

数学的帰納法による証明。 $n = 1$ のとき、$T_1 = 1 = (-1)^0 \cdot \frac{1\cdot 2}{2}$ である。ある $n \geq 2$ について $T_{n-1} = (-1)^{n-2}\frac{(n-1)n}{2}$ が成り立つと仮定する。すると

$$\begin{aligned} T_n = T_{n-1} + (-1)^{n-1}n^2 &= (-1)^{n-1}\left(n^2 - \frac{n(n-1)}{2}\right) \\ &= (-1)^{n-1}\,\frac{n(n+1)}{2}, \end{aligned}$$

となり、これは n に対する公式である。したがって、$A = B = \frac{1}{2}$ として、公式はすべての $n \geq 1$ について成り立つ。

別解として、項を二つずつ組にする方法がある。$(2m-1)^2 - (2m)^2 = -(4m-1)$ である。$n = 2m$ のときは $T_n = -\sum_{j=1}^{m}(4j-1) = -m(2m+1) = -\frac{n(n+1)}{2}$ となる。$n = 2m+1$ のときは、これに $(2m+1)^2$ を加えて $(2m+1)(m+1) = \frac{n(n+1)}{2}$ を得る。（(ii) の恒等式に x を掛けてもう一度微分する方法もあるが、計算はずっと重くなる。）

検算

$n = 4$ のとき、$1-2+3-4 = -2 = -\frac{4}{2}$ であり、$1-4+9-16 = -10 = -\frac{4\cdot 5}{2}$ である。$n = 5$ のとき、$1-2+3-4+5 = 3 = \frac{6}{2}$ であり、$-10+25 = 15 = \frac{5\cdot 6}{2}$ である。三つの恒等式すべてを n が 500 までの範囲でコンピュータで確かめたところ（たとえば $T_{10} = -55$、$T_{11} = 66$）、完全に一致した。

また、$|T_n| = 1 + 2 + \cdots + n$ であることにも注意しよう。平方の交代和は、最初の n 個の整数の普通の和と同じ大きさになる。これは意外な一致であるが、組にする議論によって説明がつく。

よくある間違い

- $x = -1$ が正当な値であるのは、(i) の恒等式がすべての $x \neq 1$ で成り立つからにほかならない、という点を忘れること。$x = 1$ では右辺は定義されない。
- $(-1)^{n+1}$ に関する符号の誤り。これは $-(-1)^n$ に等しく、$(-1)^n$ ではない。

- $n=1$ と $n=2$ から A と B を求めて、そこで終えてしまうこと。それで示されるのは、これらが**唯一可能な**値であるということだけである。公式が実際にすべての n について成り立つことを示すのは、帰納法（あるいは組にする議論）である。

STEP のその先へ

$\sum x^k$ を項別に微分することは、ある強力な考え方の有限版である。すなわち、べき級数（power series）は収束半径（radius of convergence）の内側で項別微分（term-by-term differentiation）でき、$|x|<1$ に対して $\sum kx^{k-1}=(1-x)^{-2}$ が得られる。$x=-1$ では無限級数 $1-2+3-4+\cdots$ は発散（diverge）するが、この式は値 $\frac{1}{4}$ を示唆する。実際、(ii) の式は $\frac{1}{4}-(-1)^n\frac{2n+1}{4}$ と書けるので、部分和は $\frac{1}{4}$ を中心に対称に振動する。このような発散級数に値を与えるというのが、アーベル総和法（Abel summation）の背後にある考え方である。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、べき級数の項別微分を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。