解答例

STEP I 1995、第 9 問

力学 ・ 放物運動の包絡線

> **STEP I 1995、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q9

鍵となる考え方

点 (x, y) を固定し、その点を通る軌道（trajectory）を与える投射角が存在するかを問う。軌道の方程式を θ ではなく $\tan\theta$ で表すと、$\tan\theta$ の**二次式**（quadratic）になる。点に到達できるのは、ちょうどその二次方程式が実数解をもつときである。したがって、問題全体は判別式（discriminant）の問題に帰着する。

解答

モデル

粒子を、重力のみを受けて運動する質点（point mass）として扱う。すなわち、空気抵抗（air resistance）はなく、g は大きさも向きも一定であり、経路上に障害物もないとする。このとき粒子は初速度を含む鉛直面内を運動する。また、問題になるのは O からの水平**距離**だけなので、対称性により $x \geq 0$ としてよい。粒子は x が増加する向きに、水平面から上向きに角 θ で投射されるものとし、$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする（真上への投射 $\theta = \frac{\pi}{2}$ は最後に扱う）。

軌道

$u = \sqrt{2gh}$ とおく。すなわち $u^2 = 2gh$ である。下向きの一定の加速度 g のもとで、時刻 t における位置は

$$x = ut\cos\theta, \qquad y = ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

である。$t = x/(u\cos\theta)$ を代入して消去し、$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ を用いると、

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2}(1+\tan^2\theta) = x\tan\theta - \frac{x^2}{4h}(1+\tan^2\theta),$$

を得る。ここで $2u^2 = 4gh$ を用いた。$T = \tan\theta$ とおき、両辺に $4h$ を掛けると、軌道が (x,y) を通るための必要十分条件は

$$x^2T^2 - 4hx\,T + (x^2 + 4hy) = 0. \qquad (*)$$

である。θ が $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 全体を動くとき、$T = \tan\theta$ はすべての実数値をちょうど一度ずつとる。よって、角度を選ぶことは実数 T を選ぶことと同じである。

考えてみよう なぜ軌道を θ ではなく $\tan\theta$ で表すのか？

θ で表すと、方程式に sin、cos、$\sec^2$ が混在して扱いにくい。$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ を用いれば、すべてが一変数 T の多項式になり、「角度は存在するか？」という問いは「この二次方程式は実数解をもつか？」という問いに変わる。これならすぐに答えられる。

到達できる点

$x > 0$ とする。このとき $(*)$ は T についての真の二次方程式であり、実数解をもつための必要十分条件は判別式が非負であることである：

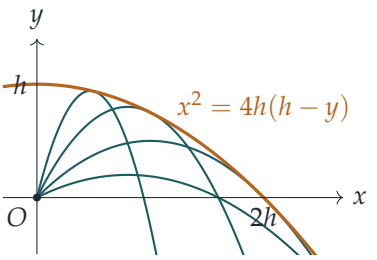
$$\begin{aligned}(4hx)^2 - 4x^2(x^2+4hy) \geq 0 &\iff 4x^2(4h^2 - x^2 - 4hy) \geq 0\\ &\iff x^2 \leq 4h^2 - 4hy = 4h(h-y),\end{aligned}$$

ここで $4x^2 > 0$ で割った。したがって、(x,y) が放物線の**上側**にある、すなわち $x^2 > 4h(h-y)$、言い換えれば $y > h - \dfrac{x^2}{4h}$ であるならば、$(*)$ は実数解をもたず、粒子を (x,y) に通過させる投射角は存在しない。

残るのは $x = 0$、すなわち O を通る鉛直線の場合である。この直線上の点で $y \neq 0$ のものには、鉛直に投射したときにしか到達しない（それ以外の角度では、$t > 0$ のすべてで $x > 0$ となる）。速さ u で真上に投射すると、粒子は高さ $u^2/(2g) = h$ まで上がり、それ以上には上がらない。これはちょうど放物線と $x = 0$ の交点である。よってこの直線上でも、放物線より上の点には到達しない。

以上より、投射角がどのようであっても、粒子は放物線 $x^2 = 4h(h-y)$ より上の点には決して到達できない。 ■

この限界は最良である。$x^2 = 4h(h-y)$ のとき判別式は 0 となり、軌道がちょうど放物線に接するような角度 $\tan\theta = 2h/x$ がただ一つ存在する。この放物線はすべての軌道の**包絡線**（envelope）であり、しばしば安全放物線（parabola of safety）と呼ばれる。



速さ $\sqrt{2gh}$ の四つの軌道（青緑）。それぞれが境界の放物線（琥珀色）に一度ずつ接している。

単純化のための仮定

- 粒子は質点である（大きさも回転もない）。
- 空気抵抗（および重力以外のすべての力）は無視する。
- 重力場は一様である。すなわち、運動する領域全体で g は一定であり、これは地表を平面とみなし、地球の自転を無視することも意味する。
- 経路は地面などによって遮られておらず、粒子は問題の点まで実際に移動できる。

検算

- $x = 0$ において放物線は $y = h = u^2/(2g)$ を与え、これは鉛直投げ上げの最高点の高さである。$y = 0$ 上では $x = 2h = u^2/g$ を与え、これは水平な地面上でのおなじみの最大到達距離である（そのときの角度は $45°$ であり、予想どおり $\tan\theta = 2h/x = 1$ となる）。
- 数値的には、$g = 9.8$、$h = 1.7$ として、ほぼ真下からほぼ真上までの 399 通りの投射角について運動を逐次計算した。どの軌道のどの点においても、放物線より上にある高さの最大値は約 -5×10^{-13}、すなわち丸め誤差を除いて 0 であった。また、固定した x に対して角度を動かして y を最大化すると、毎回 $h - x^2/(4h)$ が再現された。

よくある間違い

- θ を範囲 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ だけで考えてしまう。O より下の点には下向きの投射（$T < 0$）が必要であり、議論はそれらも含まなければならない。
- $x = 0$ を別に扱わずに x（または x^2）で割ってしまう。

- 特定の一つの軌道が放物線の下にあることだけを示してしまう。主張は**すべての**角度についてのものであり、だからこそ点を固定して角度を動かすのである。

STEP のその先へ

ここでの放物線は、一径数の軌道の族の**包絡線**、すなわち族のすべての曲線に接する曲線である。族 $F(x,y,T)=0$ の包絡線は、$F=0$ と $\partial F/\partial T=0$ から T を消去して求められ、T の二次式の場合、これはまさに判別式が 0 になることにほかならない。包絡線は、光学における焦線（caustics）、一階微分方程式（first-order differential equations）の理論（特異解（singular solutions））、そして与えられた速さのすべての投射体に対する「安全領域」などに再び現れる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、空気抵抗がある場合とない場合の放物運動を学ぶ次の一歩として好適である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。