解答例

STEP I 1995、第 8 問

純粋数学 • 線形微分方程式

> **STEP I 1995、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q8

鍵となる考え方

未知のものは 3 つの関数であるが、x を 1 つ固定すれば、それらは単なる 3 つの数 $\mathrm{f}(x)$, $\mathrm{g}(x)$, $\mathrm{h}(x)$ にすぎない。与えられた 3 つの解を $(*)$ に代入すると、これら 3 つの数についての 3 本の 1 次方程式が得られるので、これを連立方程式（simultaneous equations）として解く。第 2 段落については、$(*)$ の左辺が y について線形（linear）であるから、$x, 1, x^{-1}$ の組合せに対する結果は、それぞれの項が個別に生み出すものから導かれる。

解答

f, g, h を求める

左辺 $y'' + \mathrm{f}(x)y' + \mathrm{g}(x)y$ を Ly と書くと、$(*)$ は $Ly = \mathrm{h}(x)$ を意味する。各解を順に代入する。

- $y = 1$：このとき $y' = y'' = 0$ であるから、$\mathrm{g}(x) = \mathrm{h}(x)$。
- $y = x$：このとき $y' = 1, y'' = 0$ であるから、$\mathrm{f}(x) + x\,\mathrm{g}(x) = \mathrm{h}(x)$。
- $y = x^{-1}$：このとき $y' = -x^{-2}, y'' = 2x^{-3}$ であるから、

$$\frac{2}{x^3} - \frac{\mathrm{f}(x)}{x^2} + \frac{\mathrm{g}(x)}{x} = \mathrm{h}(x).$$

2 番目の式に $\mathrm{h} = \mathrm{g}$ を用いると $\mathrm{f}(x) = (1-x)\,\mathrm{g}(x)$ を得る。これら 2 つを 3 番目の式に代入し、両辺に x^3 を掛ける（$x > 0$ なので許される）：

$$\begin{aligned} 2 - x(1-x)\,\mathrm{g}(x) + x^2\,\mathrm{g}(x) &= x^3\,\mathrm{g}(x) \\ 2 = \mathrm{g}(x)\left(x^3 - 2x^2 + x\right) &= \mathrm{g}(x)\,x(1-x)^2. \end{aligned}$$

$0 < x < 1$ であるから因数 $x(1-x)^2$ は 0 でなく、これで割ることができる。したがって

$$\mathrm{g}(x) = \mathrm{h}(x) = \frac{2}{x(1-x)^2}, \qquad \mathrm{f}(x) = (1-x)\,\mathrm{g}(x) = \frac{2}{x(1-x)}.$$

各 x において、3 本の方程式を自由な選択の余地なく順に解いたので、条件を満たす関数はこれらしかない。制限 $0 < x < 1$ により、これらの関数が発散する $x = 0$ と $x = 1$ が除かれている。

よって方程式は

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{2}{x(1-x)}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{2}{x(1-x)^2}\,y = \frac{2}{x(1-x)^2}.$$

である。

$ax + b + c/x$ が解となるのはいつか

作用素(operator)L は線形である。すなわち定数 α, β に対して $L(\alpha u + \beta v) = \alpha\,Lu + \beta\,Lv$ が成り立つ。微分は線形であり、f, g はそれぞれ y' と y に掛かっているだけだからである。第 1 段落より

$$L(x) = L(1) = L(x^{-1}) = \mathrm{h}(x).$$

ゆえに $y = ax + b + c/x$ に対して

$$Ly = a\,L(x) + b\,L(1) + c\,L(x^{-1}) = (a+b+c)\,\mathrm{h}(x).$$

> **考えてみよう** 単に「ある x で $a+b+c=1$」ではなく、$a+b+c=1$ と結論できるのはなぜか？

すべての $0 < x < 1$ に対して $(a+b+c)\,\mathrm{h}(x) = \mathrm{h}(x)$、すなわち $(a+b+c-1)\,\mathrm{h}(x) = 0$ が必要である。ところがこの区間では $\mathrm{h}(x) = 2/\big(x(1-x)^2\big) > 0$ であるから、これで割ることができる。よって $y = ax + b + c/x$ が $(*)$ の解であるための必要十分条件は

$$a + b + c = 1.$$

である。

検算

- $(a,b,c) = (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ とおくと与えられた 3 つの解が得られ、いずれも $a+b+c=1$ を満たす。
- 直接確かめる：$x = \frac{1}{2}$ のとき $\mathrm{f} = 8, \mathrm{g} = \mathrm{h} = 16$ である。$y = 1/x$ については $y = 2$, $y' = -4, y'' = 16$ であり、$16 - 32 + 32 = 16$ となって要求どおりである。

- コンピュータで、$(0,1)$ 内の 49 個の有理数点において 3 つの解すべてを厳密に検証し、さらに 2000 組のランダムな (a,b,c,x) に対して $Ly=(a+b+c)\mathrm{h}$ を確認した。

よくある間違い

- $y=x^{-1}$ に対して $y''=-2x^{-3}$ と書いてしまう。2 つの負号が掛け合わされて $+2x^{-3}$ となる。
- $a+b+c=0$ と答えてしまう。これは $ax+b+c/x$ が**斉次**（homogeneous）方程式 $Ly=0$ の解となる条件である。ここでは右辺は 0 ではなく h である。

STEP のその先へ

これは線形微分方程式（linear differential equation）の解の構造である。すなわち、$Ly=\mathrm{h}$ の任意の 2 つの解の差は $Ly=0$ の解となる。ここでは $x-1$ と $x^{-1}-1$ が斉次方程式の解であり、2 階（second-order）の方程式では、独立な（independent）2 つの解からすべての解が得られる。よって $1+\alpha(x-1)+\beta(x^{-1}-1)$ が一般解（general solution）であり、これはちょうど $a+b+c=1$ を満たす族にほかならない。「独立」という言葉を厳密にするのがロンスキアン（Wronskian）である。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）は、これらすべてを扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。